11 класс

11.1. «Убегание от Солнца». Космический аппарат (КА) выходит из сферы действия Юпитера со скоростью V_0 = 24 км/с относительно Солнца. 1). По какой траектории КА удаляется от Солнца? 2). С какой скоростью (в км/с) КА будет двигаться в межзвездном пространстве?

Масса Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг. Расстояние от Солнца до Юпитера r_0 = 5,2 а.е. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг². 1 а.е. = 150 млн. км.

Решение.

1). На расстоянии r_0 = 5,2 а.е. параболическая скорость (2-я космическая, скорость убегания) равна

$$V_{пар} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r_0}} = 18{,}5\ км/с\ . \qquad \textbf{(1б)}$$

Т.к. $V_0 > V_{пар}$, то КА удаляется от Солнца по гиперболической траектории. **(1б)**

2). Полная механическая энергия КА сохраняется:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{GM_\odot m}{r} = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{GM_\odot m}{r_0}, \qquad \textbf{(2б)}$$

где m – масса КА. КА преодолевает поле тяготения Солнца и уходит в межзвездное пространство (на математическую бесконечность). Из уравнения энергии находим скорость КА на $r = \infty$:

$$V_\infty = \sqrt{V_0^2 - \frac{2GM_\odot}{r_0}}\ . \qquad \textbf{(3б)}$$

Из этой формулы: $V_\infty = 15{,}3\ км/с$. **(1б)**

11.2. Белый карлик 40 Eri B. Он имеет эффективную температуру поверхности T = 17000 K и абсолютную звёздную величину $M = 11{,}0^m$. 1). Найти его светимость (в единицах солнечной светимости $L_\odot$. 2). Найти его радиус R (в км).

Радиус Солнца $R_\odot = 7\cdot10^8$ м. Эффективная температура поверхности Солнца $T_\odot = 5800$ K.

Решение.

1). Связь светимости звезды с её абсолютной звёздной величиной:

$$\lg\frac{L}{L_\odot} = 0,4(4,8 - M).$$ **(2б)**

Из этого уравнения получаем: $L = 3,3\cdot10^{-3}\,L_\odot$. **(2б)**

2). Радиус звезды находим из соотношения

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4;$$ **(2б)**

$$\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 = \frac{L}{L_\odot}\left(\frac{T_\odot}{T}\right)^4 \quad\rightarrow\quad R = 7\cdot10^{-3}R_\odot = 4900\ км$$ **(2б)**

11.3. Наша Солнечная система приближается звезде Веге со скоростью $v = 14$ км/с. Параллакс Веги $\pi = 0{,}12''$. Через сколько лет видимый блеск Веги увеличится на $0{,}1^m$? 1 пк $\approx 3{,}1\cdot10^{18}$ см.

Решение.

Выразим отношение нынешнего и увеличившегося в будущем блеска Веги:

$$\frac{I_2}{I_1} = 2{,}512^{0,1} = 1{,}096$$

(3 б)

Это будет соответствовать обратно квадратичному изменению расстояний:

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{I_2}{I_1}$$

(1 б)

Расстояние R_1 определится из параллакса:

$$R_1 = \frac{1}{\pi} \text{ (пк)}$$

(1 б)

R_1 = 8,33 пк. Отсюда получим (уменьшившееся) расстояние R_2 = 7,96 пк:

Разница составит $\Delta R = 0{,}37$ пк. То есть время полёта: $t \approx 26\,000$ лет. **(3 б)**

11.4. Вращение Земли.

Длительность суток на Земле в современную эпоху T_0 = 24 часа. Однако из-за приливного трения продолжительность суток на Земле увеличивается на $\Delta T = 10^{-3}$ с за Δt = 100 лет. 1). Считая вращение Земли равнозамедленным, найдите угловое ускорение ε Земли. 1 год = $3{,}2 \cdot 10^7$ с.

<u>Указание</u>: *примените формулу «приближённого вычисления»* $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx$ *при* $x << 1$.

2). Предположим, что когда-нибудь Земля перестанет вращаться вокруг своей оси. Через сколько лет (τ) это произойдёт?

Решение.

1). Угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси: $\omega = \omega_0 - \varepsilon \cdot \Delta t$. **(1б)**

Т.к. $\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad T = T_0 + \Delta T = T_0\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right),$ **(1б)**

то угловое ускорение Земли $\varepsilon = \frac{2\pi \cdot \Delta T}{T_0^2 \Delta t}$. **(3б)**

Из этой формулы получаем: $\varepsilon = 2{,}6 \cdot 10^{-22}$ рад/с^2. **(1б)**

2). Если Земля перестанет вращаться, то её угловая скорость $\omega = 0$ через $\tau = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{2\pi}{\varepsilon T_0}$;**(1б)**

$\tau \approx 9 \cdot 10^9$ лет. **(1б)**

11.5. Нейтронная звезда.

Рассмотрим нейтронную звезду со средней плотностью $\rho = 10^{18}$ кг/м^3. Предположим, что радиус этой звезды равен предельному радиусу $R = \alpha \cdot R_g$, где $\alpha = 4/3$; $R_g = 2GM/c^2$ - гравитационный радиус звезды; M - масса звезды; G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная; c = 3·10⁸ м/с – скорость света в вакууме. Вычислить радиус R (в км) этой звезды и её массу M (в единицах солнечной массы $M_\odot$). Масса Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

Решение.

Т.к. $R = \alpha \cdot \dfrac{2GM}{c^2}$ и $M = \rho \cdot \dfrac{4\pi R^3}{3}$, то $R = c \cdot \sqrt{\dfrac{3}{8\pi\alpha G\rho}}$ **(4б)**, и R = 11 км. **(2б)**

Масса звезды: $M = 5{,}6 \cdot 10^{30}$ кг **(1б)** и $M = 2{,}8\ M_\odot$ **(1б).**

11.6. Сферическая форма небесных тел.

Где проходит граница между малыми и большими небесными телами? Начиная с какой «критической» массы $M_{кр}$, с какого «критического» размера $R_{кр}$ небесное тело будет иметь сферическую форму? Численные оценки получите для тел из гранита. Плотность гранита ρ = 2700 кг/м³. Предел прочности гранита $\sigma_m = 10^8$ Па. Для объема несферического тела принять оценочную формулу $V \approx R^3$, где R – характерный размер тела.

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² – гравитационная постоянная.

Решение.

Бесформенное небесное тело может принять сферическую форму после его «разрушения» гравитационными силами давления (после этого сферическая форма принимается под действием самогравитации). Условие гравитационного разрушения: гравитационное (гидростатическое) давление в «центре» $P_{гр}$ должно удовлетворять условию $P_{гр} \geq \sigma_m$. **(1б)**

Гравитационное давление: $P_{гр} \approx \rho g R \approx \rho \dfrac{GM}{R^2} R = \dfrac{\rho GM}{R}$. **(1б)**

Из условия разрушения сразу следует

$$R \geq \frac{1}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_m}{G}} \quad \Rightarrow \quad R_{кр} \approx \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\sigma_m}{G}}$$ **(2б),** $R_{кр} \approx 450$ км. **(1б)**

и

$$M_{кр} \approx \rho R_{кр}^3 \approx \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\sigma_m}{G}\right)^{3/2}$$ **(2б),** $M_{кр} \approx 3 \cdot 10^{20}$ кг. **(1б)**