11 класс

Задача 1

Однажды в январе житель города Перт в Австралии захотел увидеть неомение – первое появление Луны на небе после новолуния в виде узкого серпа. В его доме есть окна, выходящие на север, и окна, выходящие на юг. К какому окну ему нужно подойти, чтобы увидеть неомение, и почему?

5 баллов

Решение

Сразу после новолуния Луна смещается от Солнца к востоку. Следовательно, узкий серп её появляется на небе в сумерки сразу после захода Солнца в западной части неба. Но не точно на западе! В северном полушарии, как мы привыкли, точка захода Солнца лежит между точками запада и севера – летом, и между точками запада и юга – зимой. Но город Перт находится в южном полушарии, а там картина обратная.

В январе в Перте лето. Поэтому заход Солнца произойдет в юго-западной части неба. Там же появится на небе и узкий серп молодой Луны. Поэтому наблюдатель должен подойти к южному окну.

Можно рассуждать иначе. В период с конца марта по середину сентября (между мартовским и сентябрьским равноденствиями) точки восхода и захода Солнца смещены к северу независимо от полушария. А между сентябрем и мартом, наоборот, к югу. Стало быть, в январе что в Перте, что в Сызрани точка захода Солнца будет лежать между точками запада и юга.

Оценка

1 бал дается за понимание, что неомение видно при заходе Солнца, т.е. в западной части неба. 1 балл – за объяснение, что заход только в исключительных случаях происходит точно на западе. 2 балла за определение того, к северу или к югу будет смещена точка захода с учетом положения наблюдателя в южном полушарии. И еще 1 балл за правильный окончательный вывод.

Задача 2

В звездном каталоге указан параллакс некоторой звезды $\pi = 0{,}001'' \pm 0{,}002''$. Что можно сказать о расстоянии до этой звезды?

4 балла

Решение

Число после символа «$\pm$» – это точность, с которой известен параллакс. Поэтому формально параллакс лежит в интервале $[-0{,}001''; 0{,}003'']$. Но так как по своему смыслу параллакс не может быть отрицательным, фактически это интервал $[0; 0{,}003'']$.

Расстояние до звезды в парсеках – это величина, обратная параллаксу. Поэтому расстояние это лежит в пределах от $\frac{1}{0{,}003} \approx 330$ парсек до бесконечности. Корректнее сказать: «не менее 330 пк».

Оценка

1 бал за знание параллакса и его связи с расстоянием. 2 балла за определение интервала возможных значений параллакса с учетом его физического смысла. 1 балл за окончательный ответ.

Если участник упускает из виду тот факт, что параллакс не может быть отрицательным, все решение оценивается в 0 баллов.

Задача 3

Максимальный видимый радиус Солнца составляет $16'17{,}53''$, а минимальный - $15'45{,}34''$. Найдите эксцентриситет орбиты Земли.

8 баллов

Решение

Обозначим R – линейный радиус Солнца, ρ – угловой радиус Солнца, r – расстояние Солнца от Земли. Тогда простейшие геометрические соображения показывают, что

$$R = r\,\mathrm{tg}\,\rho.$$

Поскольку угол ρ мал, можно записать (если ρ выражать в радианах)

$$R = r\rho,$$

откуда

$$r = \frac{R}{\rho}.$$

С другой стороны, формулы небесной механики показывают, что в перигелии (π) расстояние равно

$$r_\pi = a(1 - e),$$

а в афелии (α)

$$r_\alpha = a(1 + e),$$

где a – большая полуось, e – эксцентриситет орбиты Земли.

Таким образом,

$$\frac{R}{\rho_\pi} = a(1 - e),$$

$$\frac{R}{\rho_\alpha} = a(1 + e).$$

Поделив верхнюю формулу на нижнюю, найдем

$$\frac{\rho_\pi}{\rho_\alpha} = \frac{1+e}{1-e}.$$

Интересно, что поскольку слева стоит отношение угловых радиусов, то для вычисления не нужно переводить их в радианы, достаточно выразить в одинаковых единицах, например, в минутах и десятичных долях минут. Обозначим это отношение буквой k. Тогда из нашего уравнения находим:

$$e = \frac{k-1}{k+1}.$$

Переходим к числам:

$$k = \frac{\rho_\pi}{\rho_\alpha} = \frac{16 + 17{,}53/60}{15 + 45{,}34/60} = 1{,}034051,$$

$$e = \frac{0{,}034051}{2{,}034051} = 0{,}01674.$$

Оценка

Связь видимого углового радиуса с расстоянием оценивается в 2 балла. Так же в 2 балла оценивается знание формул для афелийного и перигелийного расстояний. Еще 2 балла за вывод формулы для эксцентриситета и 2 балла за вычисление.

Возможно (и даже скорее всего), что участник выберет менее удобный и более долгий путь решения. Например, сначала найдет численные расстояния до Земли в перигелии и в афелии. Тогда по образцу выше 2 балла назначается за знание связи, 2 балл за вычисление расстояние. После этого 2 балла за уравнение для эксцентриситета и 2 балла за его решение. Если расстояния вычислены неправильно, то и ответ получится неправильный. В этом случае баллы за вычисления не присуждаются, и максимум можно получить 4 балла (2 за связь расстояние с угловым радиусом, 2 за перигелийное и афелийное расстояния (формулы)).

Для правильного численного ответа достаточно 2 значащих цифр, т.е. 0,017 – это правильный ответ.

Попутное вычисление большой полуоси дополнительных баллов не приносит, поскольку не требуется для задачи.

Так же, использование точных тригонометрических формул связи расстояние-радиус лишь усложняет работу участника, но не дает ему никаких баллов.

Задача 4

Затмение Луны происходит при склонении Солнца $+21°16'$ и склонении Луны $-21°42'$. Нарисуйте схему прохождения Луны через земную тень, как это будет видно из средних широт южного полушария. На схеме покажите в правильном масштабе тень и лунный диск, траекторию движения Луны, стрелкой обозначьте направление движения.

Диаметр земной тени принять равным 2,5 диаметрам Луны.

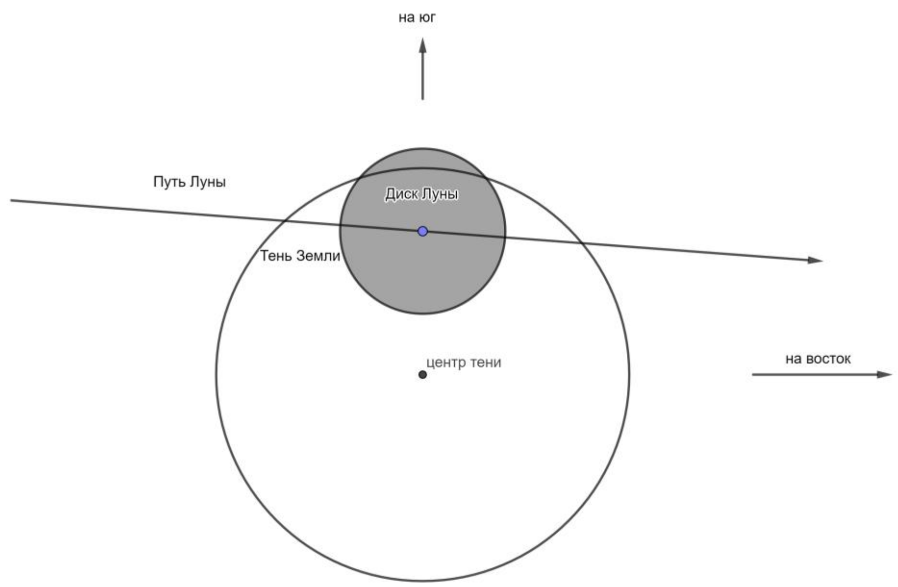
6 баллов

Решение

Центр круга земной тени имеет склонение, противоположное по знаку склонению Солнца, т.е. $-21°16'$. А склонение Луны по условию меньше на $26'$. Т.е. Луна пройдет южнее (выше в южном полушарии) центра тени. Видимое орбитальное движение Луны происходит в направлении, противоположном суточному вращению небесной сферы, т.е. с запада на восток. В южном полушарии над головой находится южный полюс, затмение происходит в северной части неба, потому что Солнце в это время под горизонтом на юге. А если смотреть на север, то запад будет слева, восток справа.

От центра тени до края диска Луны $26' + 15' = 41'$, что больше радиуса земной тени, равного $2{,}5 \cdot 15' = 37{,}5'$. Следовательно, затмение будет частным.

Остальное показано на рисунке.



Оценка

По одному баллу дается за правильное определение следующих факторов:

- склонение центра Земной тени;
- изображение тени и Луны в правильном масштабе;
- изображение диска Луны в нужном месте с учетом частного характера затмения;
- указание направления на юг – вверх;
- указание направления на восток – вправо (или на запад – влево);
- изображение траектории движения Луны в нужном направлении.

Наклон траектории Луны из условия задачи определить невозможно, поэтому он в известной степени произволен. Степень эта состоит в том, что наклон этот не может быть слишком большим, как, например, сверху вниз или снизу вверх, что характерно для региона экватора, но не средних широт.

Задача 5

Звезда α Центавра двойная, причем её общая звездная величина равна -0,27. Величина более яркого компонента 0,01. Какова звездная величина менее яркого компонента?

8 баллов

Решение

Надо понимать, что звездные величины не являются аддитивными – их нельзя складывать. Аддитивной величиной является освещенность: общая освещенность от двух источников света равна сумме освещенностей от каждого из них. Связь между звездной величиной и освещенность дается формулой Погсона. В учебнике Б.А. Воронцова-Вельяминова она приводится в следующем виде:

$$\frac{E_1}{E_2} = 2{,}512^{m_2 - m_1}.$$

Обозначим E_1 – освещенность от более яркого компонента, E_2 – освещенность от менее яркого компонента, E – полная освещенность, создаваемая обоими компонентами звезды, а символом m с соответствующим индексом – блеск, выраженный в звездных величинах. Тогда

$$E_2 = E - E_1.$$

Применяя два раза формулу Погсона, запишем

$$2{,}512^{m_1 - m_2} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{E - E_1}{E_1} = \frac{E}{E_1} - 1 = 2{,}512^{m_1 - m} - 1.$$

Прологарифмируем первое и последнее выражение из этой цепочки равенств по основанию 2,512:

$$m_1 - m_2 = \log_{2{,}512}(2{,}512^{m_1 - m} - 1),$$

откуда получится

$$m_2 = m_1 - \log_{2{,}512}(2{,}512^{m_1 - m} - 1).$$

Подставим численные значения[1]:

$$m_2 = 0{,}01 - \log_{2{,}512}\left(2{,}512^{0{,}01-(-0{,}27)} - 1\right) = 1{,}34.$$

В литературе куда чаще встречается вариант формулы Погсона с десятичными логарифмами:

[1] Логарифм по основанию 2,512 на калькуляторе можно вычислить по формуле перехода к новому основанию:

$$\log_{2{,}512} x = \frac{\lg x}{\lg 2{,}512}.$$

$$m_2 - m_1 = 2{,}5\lg\frac{E_1}{E_2}.$$

При её использовании окончательное выражение примет вид:

$$m_2 = m_1 - 2{,}5\lg\left[10^{0{,}4(m_1 - m)} - 1\right].$$

Численный ответ от этого, разумеется, не изменится.

Ответ: 1,34.

Оценка

Знание того, что складываются освещенности – 2 балла. 2 балла за формулу Погсона, связывающую освещенность со звездной величиной в любой правильной форме. 2 балла за формулу для искомой величины и еще 2 – за вычисление правильного ответа.

Задача 6

Космический телескоп имени Джеймса Уэбба запущен в так называемую внешнюю точку Лагранжа. В этой точке он постоянно находится на одной прямой с Солнцем и Землей, но дальше Земли на некоторое расстояние. Найдите это расстояние (т.е. расстояние от Земли до точки Лагранжа), если известно, что оно значительно меньше, чем расстояние от Земли до Солнца. Орбиту Земли считать круговой.

10 баллов

Решение

Поскольку точка Лагранжа постоянно находится на прямой, соединяющей Солнце и Землю, то и оборот вокруг Солнца она совершает за один год. В данном случае нужно взять сидерический год – время оборота в инерциальной системе. Но находится она дальше Земли и, казалось бы, должна в соответствии с законами Кеплера обращаться с меньшей скоростью. Дело в том, однако, что кроме Солнца она притягивается еще и к Земле, находящейся в том же направлении, что и Солнце. Дополнительная сила притяжения обуславливает большую угловую скорость.

Введем обозначения: G – гравитационная постоянная, M – масса Солнца, m – масса Земли, μ – масса космического телескопа, a – большая полуось (радиус) орбиты Земли, x – искомое расстояние от Земли до точки Лагранжа.

Суммарная сила притяжения телескопа со стороны Солнца и Луны по закону всемирного тяготения равна

$$F = \frac{GM\mu}{(a+x)^2} + \frac{Gm\mu}{x^2}.$$

Эта сила создает центростремительное ускорение

$$\omega^2(a+x) = G\left[\frac{M}{(a+x)^2} + \frac{m}{x^2}\right],$$

Где ω – угловая скорость Земли и телескопа. Из этого уравнения нужно найти x.

«Лобовое» решение приводит к алгебраическому уравнению пятой степени с коэффициентами как очень высоких, так и очень низких порядков, что очень неудобно. Но это уравнение легко упростить.

Сначала «обезразмерим» уравнение, т.е. постараемся сделать так, чтобы в него входили по-возможности только безразмерные величины. Для этого в правой части вынесем за скобку множитель M/a^2, а потом все уравнение поделим на $\omega^2 a$:

$$1+\frac{x}{a}=\frac{GM}{a^3\omega^2}\left[\frac{1}{(1+x/a)^2}+\frac{m/M}{(x/a)^2}\right].$$

Множитель перед квадратной скобкой тоже оказывается безразмерным. Более того, если вычислить его значение, оно оказывает очень близким к единице. И не случайно! Вспомним третий закон Кеплера в его абсолютной (ньютоновой) форме:

$$a^3\omega^2=G(M+m),$$

или, если пренебречь массой Земли по сравнению с массой Солнца,

$$a^3\omega^2=GM.$$

Так что можно положить этот множитель равным точно единице.

Вот мы уже избавились от высоких порядков. Далее, обозначим для удобства $x/a=u$, причем из условия известно, что эта величина малая. Тогда:

$$u=\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{m/M}{u^2}-1.$$

Пользуясь малостью u, запишем $(1+u)^{-2}\approx 1-2u$.

$$u=1-2u+\frac{m/M}{u^2}-1=\ -2u+\frac{m/M}{u^2},$$

или

$$u^3=\frac{1}{3}\frac{m}{M}.$$

Поскольку $m/M=1/333000$, то

$$u^3=10^{-6},\ \ u=0{,}01.$$

Таким образом, расстояние от Земли до точки Лагранжа в 100 раз меньше расстояния от Земли до Солнца и равно **1,5 млн км**.

Оценка

Это самая сложная задача тура, поэтому за нее дается 10 баллов.

Естественным образом она разбивается на 2 этапа: вывод уравнения и его решение. Каждый этап оценивается в 5 баллов.

На первом этапе нужно получить уравнение для искомой величины. Тут 3 балла за объяснение качественной картины – суммарное притяжение Солнца и Земли создают центростремительное ускорение. 1 балл за запись силы притяжения по закону Ньютона, 1 балл за составление уравнения путем приравнивания этой силы кинематическому выражению для ускорения.

Участник может вместо угловой скорости ω использовать период обращения Земли:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Грубой ошибкой считается измерение угла не в радианах, а в градусах, если в дальнейшем участник не учитывает этот факт и не получает правильное решение.

Второй этап – решение уравнения – сам по себе достоин олимпиадной задачи по математике. И здесь участник может использовать самые разные методы. Для предложенного решения оценка делается следующим образом. Выделение размерных величин в отдельный множитель (обезразмеривание задачи) – 1 балл. Применение закона Кеплера – 1 балл. Так же один бал присуждается, если участник не пользуется законом Кеплера, а просто вычисляет значение $\frac{GM}{a^3\omega^2}$, равное примерно единице. Упрощение уравнения путем использования свойств малых величин – 1 балл, вывод окончательной рабочей формулы для вычисления – 1 балл, получение результата – 1 балл.

Если участник выбирает какой-то иной способ решения, жюри должно самостоятельно определить критерии оценки этого этапа. В любом случае, если получен правильный численный ответ допустимым способом (пусть даже и подбором), то за этот этап начисляется 5 баллов.

Следует иметь в виду, что при некоторых способах решения может произойти значительная потеря точности из-за вычитания близких чисел. Например, если от уравнения задачи перейти к упомянутому уравнению пятой степени

$$\omega^2(a+x)^3x^2 - GMx^2 - Gm(a+x)^2 = 0,$$

то первые два члена имеют близкие значения. Вычисление с округлением до 2 знаков приведет к потере точности. В этом случае следует считать неверным только заведомо абсурдный результат. Например, значение 1,3 млн км можно признать допустимым, но 100 тыс. или 10 млн км – уже нет.

Возможные незначительные ошибки. Если для вычисления угловой скорости используется не сидерический, а какой-либо другой период обращения Земли, выставленная по рекомендациям выше оценка снижается на один балл. Если для вычисления угловой скорости Земли угол берется не в радианах, а в градусах, а в дальнейшем это никак не корректируется, итоговая оценка уменьшается на 1 балл, если выполнен только первый этап работы, и на 2 балла, если хотя бы частично выполнен второй.

Задача	Максимальный балл
1	5
2	4
3	8
4	6
5	8
6	10
Всего	**41**