7-8 класс

Задача № 1.

В **1838** году немецкий математик и астроном Фрѝдрих Вильгѐльм Бѐссель измерил годичный параллакс звезды $\mathbf{61}$ Лебедя и получил такие результаты $\mathbf{0,314''} \pm \mathbf{0,014''}$. Используя результаты Бѐсселя, определите минимальное и максимальное расстояние от Солнца до упомянутой звезды.

Решение.

Запишем формулу расстояния до звезды

$$\boldsymbol{R}[\text{пк}] = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\pi}['']}$$

где $\boldsymbol{R}[\text{пк}]$ – расстояние до звезды в парсеках, а $\boldsymbol{\pi}['']$ – годичный параллакс этой звезды в угловых секундах.

Тогда

$$\boldsymbol{R_{min}}[\text{пк}] = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\pi_{max}}['']} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0,314'' + 0,014''}} \approx \mathbf{3,05}\ \text{пк}$$

$$\boldsymbol{R_{max}}[\text{пк}] = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\pi_{min}}['']} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0,314'' - 0,014''}} \approx \mathbf{3,33}\ \text{пк}$$

Ответ: минимальное - $\mathbf{3,05}$ пк; максимальное - $\mathbf{3,33}$ пк.

Задача № 2.

Жители некоторой планеты пользуются календарем, в котором каждый седьмой год является високосным, причём в обычном году $\mathbf{399}$ земных суток, а в високосном $\mathbf{400}$ земных суток. Кроме этого соответствие даты и дня недели точно повторяется каждые семь лет (то есть первое число каждого седьмого года, приходится на один и тот же день недели). Вычислите количество суток в неделе такого календаря. Считайте, что неделя длиннее одних суток и короче года, а также содержит целое число суток.

Решение.

В обычном году $\mathbf{399}$ суток, а в високосном $\mathbf{400}$ суток. За семь лет пройдёт шесть обычных лет и один високосный, то есть

$$\mathbf{6 \cdot 399 + 1 = 2\,395}\ \text{суток}$$

Чтобы календарь повторялся каждые семь лет необходимо, чтобы в вычисленный промежуток времени укладывалось целое число недель. Значит, нам необходимо найти делители числа $\mathbf{2\,395}$. Это число раскладывается единственным образом на простые делители

$$\mathbf{2\,395 = 5 \cdot 479}$$

Значит, есть два варианта, неделя длиной $\mathbf{5}$ суток или $\mathbf{479}$ суток. Во втором случае неделя получается длиннее года, так что такой вариант не подходит.

Формально есть ещё делитель $\mathbf{1}$, но неделя из одних суток также не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $\mathbf{5}$ суток.

<u>Задача № 3.</u>

$\mathbf{14}$ октября $\mathbf{2023}$ года новолуние произойдёт в $\mathbf{17^h55^m}$ всемирного времени. Определите дату и московское время новолуния в следующем месяце.

<u>Решение.</u>

Фазы Луны повторяются через $\mathbf{29,53}$ суток, этот промежуток времени называется синодическим периодом. Тогда нужно понять какая дата и время будет спустя синодический период.

$$\mathbf{14}\text{ октября} + \mathbf{29}\text{ суток} = \mathbf{12}\text{ ноября}$$

То есть, спустя ровно $\mathbf{29}$ суток будет $\mathbf{12}$ ноября $\mathbf{17^h55^m}$ всемирного времени. Нужно оставшиеся $\mathbf{0,53}$ суток пересчитать в часы и минуты и добавить к полученному времени.

$$\mathbf{0,53}\text{ суток} = \mathbf{0,53\ \cdot 12^h = 12,72^h = 12^h + 0,72 \cdot 60^m \approx 12^h43^m}$$

Вычисляем время

$$\mathbf{17^h55^m + 12^h43^m = 29^h98^m = 30^h38^m = 6^h38^m}\text{ следующей даты}$$

Получаем, что следующее новолуние произойдёт $\mathbf{13}$ ноября $\mathbf{6^h38^m}$ всемирного времени. Московское время больше всемирного на $\mathbf{3}$ часа. Значит, следующее новолуние будет $\mathbf{13}$ ноября $\mathbf{9^h38^m}$.

Ответ: $\mathbf{13}$ ноября $\mathbf{9^h38^m}$.

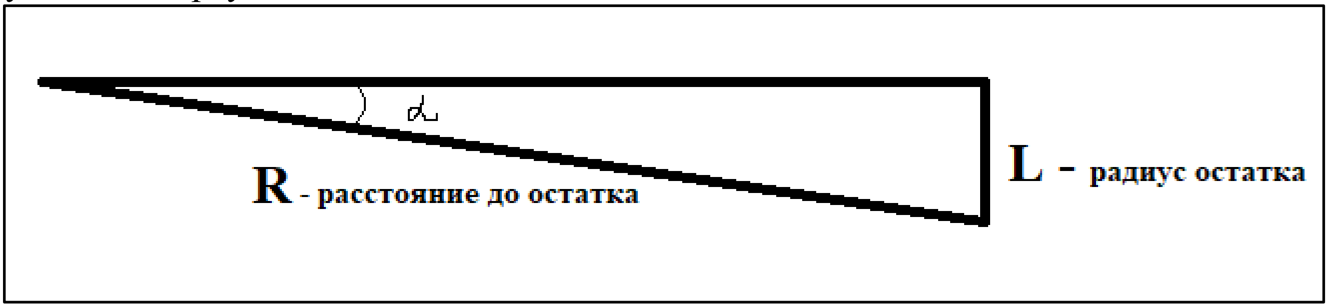
<u>Задача № 4.</u>

Угловой диаметр остатка сверхновой в созвездии Парус составляет $\mathbf{8°}$, расстояние до него равно $\mathbf{815}$ световых лет. При взрыве сверхновой разлетающееся вещество движется со скоростью около $1\,500$ км/с. Оцените, когда примерно вспыхнула эта сверхновая. Считайте вспышку сферически симметричной, а скорость разлёта вещества постоянной.

Решение.

Так как вспышка сферически симметрична, а скорость разлёта вещества постоянна, то с момента вспышки наиболее удалённое вещество должно пройти радиус остатка сверхновой. Известно, что угловой диаметр остатка **8°**, значит, угловой радиус - **4°**. Нужно вычислить, чему равен радиус остатка в единицах длины. Это можно сделать разными методами.

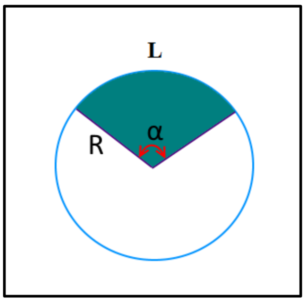
Например, считать радиус остатка катетом, а расстояние до остатка гипотенузой прямоугольного треугольника. Тогда



$$L = R \cdot \sin\alpha = 815 \cdot \sin 4^\circ \text{ световых лет} \approx 56,9 \text{ световых лет}$$

Можно считать иначе. Связь между длиной дуги, радиусом окружности и соответствующим центральным углом (в радианах) определяется формулой

$$\alpha[\text{рад}] = \frac{L}{R}$$



откуда

$$L = \alpha[\text{рад}] \cdot R$$

Можно вычислять не в радианах, а в градусах. Тогда формула будет такой

$$L = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha[^\circ] \cdot R$$

Применим эту формулу к нашей ситуации, тогда радиус остатка (он и будет равен длине дуги L)

$$L = \frac{\pi}{180} \cdot 4^\circ \cdot 815 \text{ световых лет} \approx 56,9 \text{ световых лет}$$

Учитывая связь между световым годом и парсеком 1 пк $\approx 3,26$ светового года и значение парсека в километрах 1 пк $= 3,086 \cdot 10^{13}$км, получим

$$L = \frac{56,9}{3,26} \cdot 3,086 \cdot 10^{13}\text{км} \approx 53,86 \cdot 10^{13}\text{км}$$

Тогда время, прошедшее с момента взрыва,

$$t = \frac{L}{v_{\text{вещества}}} = \frac{53,86 \cdot 10^{13}\text{км}}{1,5 \cdot 10^{3}\text{км/с}} \approx 35,91 \cdot 10^{10}\text{с} \approx \frac{35,91 \cdot 10^{10}}{365 \cdot 24 \cdot 3600}\text{лет} \approx 11\,400 \text{ лет}$$

Также нужно учесть тот факт, что в данный момент мы видим ситуацию такой, как она была 815 лет назад, то есть реальный момент вспышки отодвинут в прошлое еще на 815 лет. Таким образом, вспышка сверхновой произошла порядка $12\,000$ лет назад или $10\,000$ лет до нашей эры.

Ответ: около $10\,000$ лет до нашей эры.

Задача № 5.

3 ноября в 17^h30^m московского времени Луна находилась на угловом расстоянии $1,4°$ от Поллу̀кса (β Близнецов), а 11 ноября в 11^h30^m – в $2,4°$ от Спѝки (α Девы). Определите максимально и минимально возможное угловое расстояние между упомянутыми звёздами. Движение Луны среди звёзд считать равномерным.

Решение.

Сидерический месяц (период обращения Луны вокруг Земли относительно звезд) составляет (справочные данные)

$$27,32 \text{ суток} = 27,32 \cdot 24 \text{ часа} \approx 655,68 \text{ часов}$$

За этот промежуток времени Луна делает один полный оборот среди звёзд, то есть проходит угол в $360°$, значит, её угловая скорость равна

$$\frac{360°}{655,68 \text{ часов}} \approx 0,55°/\text{час}$$

Между положениями Луны, указанными в задаче, прошло

$$8 \cdot 24 \text{ часа} - 6,5 \text{ часа} = 185,5 \text{ часа}$$

за это время Луна должна была пройти

$$185,5 \text{ часа} \cdot 0,55°/\text{час} \approx 102°$$

Максимально и минимально возможные угловые расстояния между упомянутыми звёздами получатся, если обе звезды окажутся на траектории движения Луны. Тогда

$$\alpha_{min} = 102° - 1,4° - 2,4° = 98,2°$$

$$\alpha_{max} = 102° + 1,4° + 2,4° = 105,8°$$

В реальности указанные моменты соответствуют проходу Луны на минимальном расстоянии от указанных звезд, но в первом случае к югу от Поллу̀кса, а во-втором к северу от Спѝки. Поэтому реальное угловое расстояние (около $94°$) будет несколько отличаться от вычисленного нами.

Ответ: минимальное - $98,2°$; максимальное - $105,8°$.

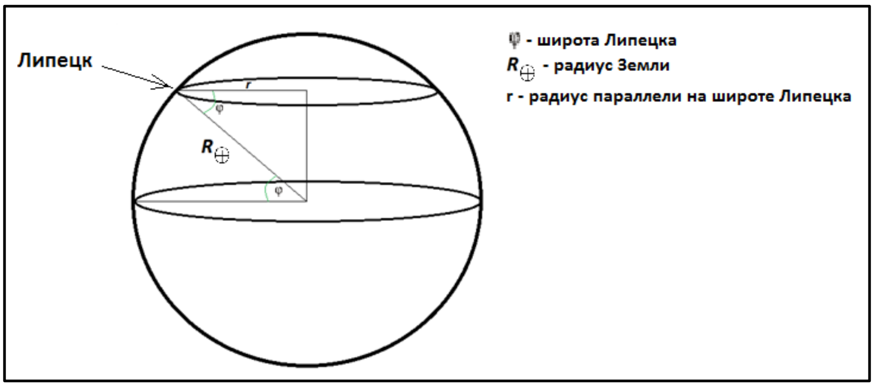
Задача № 6.

У липецкого школьника испортились часы – за сутки они отстают на 4 минуты. В 7 утра, собираясь в школу, он устанавливает их точно по местному времени своей квартиры. Вернувшись в $16:00$ местного времени домой, школьник смотрит на часы. На каком расстоянии от дома школьника на параллели Липецка находится место, для которого увиденное им время окажется точным в данный момент? Широту Липецка считать известной $\varphi = 52,5°$.

Решение.

Поскольку часы отстают, то пункт окажется за̀падней дома школьника. Определим, насколько различаются местные времена, а значит и долготы этих двух пунктов. Так как часы отстают на 4 минуты за сутки, то в час они отстанут на $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ минуты. С 7 утра до $16:00$ проходит 9 часов, тогда за этот промежуток времени часы отстанут на $9 \cdot \frac{1}{6} = 1,5$ минуты. Определим, какому расстоянию на широте Липецка соответствует такая разница во времени.

Найдём длину параллели L на широте Липецка. Для этого сначала найдём её радиус r (смотри рисунок).



$$\boldsymbol{r = R_{\oplus} \cdot \cos\varphi}$$

Тогда длина этой параллели

$$\boldsymbol{L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot R_{\oplus} \cdot \cos\varphi \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6400}\ \text{км} \cdot \boldsymbol{\cos 52{,}5^\circ \approx 24\,467}\ \text{км}$$

где $\boldsymbol{R_{\oplus}}$ – радиус Земли. В качестве радиуса Земли можно брать непосредственно полярный или экваториальный радиусы (из справочной информации), либо взять приближённое значение $\mathbf{6400}$ км. Можно также вычислить средний радиус, как среднее арифметическое экваториального и полярного значений.

Длине параллели $\boldsymbol{L}$ соответствуют $\mathbf{24}$ часа $= \mathbf{1440}$ минут широты, тогда $\mathbf{1{,}5}$ минутам соответствует расстояние

$$\boldsymbol{l = \frac{1{,}5}{1440} \cdot L = \frac{1{,}5}{1440} \cdot 24\,467}\ \text{км} \approx \mathbf{25{,}5}\ \text{км}$$

Ответ: примерно $\mathbf{25{,}5}$ км.