9 класс

Задача № 1.

Где на поверхности Земли должен располагаться наблюдатель, чтобы фраза «Сириус – самая яркая звезда ночного неба» была для него неверна? Координаты Сириуса $\boldsymbol{\alpha = 06^h 45^m}$; $\boldsymbol{\delta = -16°43'}$.

Решение.

Если наблюдатель видит Сириус, то он для него будет самой яркой звездой ночного неба. Поэтому для ответа на вопрос задачи необходимо понять, из какой области на поверхности Земли Сириус принципиально не может наблюдаться. Применим формулу для высоты светила над горизонтом в верхней кульминации к югу от зенита

$$\boldsymbol{h_{\text{ВК}} = 90° + \delta - \varphi}$$

где $\boldsymbol{\delta}$ – склонение светила, а $\boldsymbol{\varphi}$ – географическая широта места наблюдения.

Так как наблюдатель не должен видеть Сириус, то его высота над горизонтом в верхней кульминации должна быть отрицательна $\boldsymbol{h_{\text{ВК}} < 0}$, тогда

$$\boldsymbol{90° + \delta - \varphi < 0}$$

откуда

$$\boldsymbol{\varphi > 90° + \delta}$$

подставляя численные данные, получаем

$$\boldsymbol{\varphi > 90° - 16°43' = 73°17'}$$

Следовательно, для наблюдателя, широта которого удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{73°17' < \varphi < 90°}$$

Сириус не виден.

Ответ: $\boldsymbol{73°17' < \varphi < 90°}$.

Задача № 2.

На поверхность Земли за год выпадает в среднем около $\boldsymbol{10\,000}$ тонн метеоритного вещества. Оцените массу такого вещества, выпавшего на территорию современного Липецка с момента его основания в $\boldsymbol{1703}$ году. Площадь Липецка считайте постоянной и равной $\boldsymbol{330,15}$ км$^{\boldsymbol{2}}$.

Решение.

На территорию современного Липецка за год метеоритного вещества выпадает меньше во столько раз, во сколько его площадь меньше площади поверхности Земли.

$$\frac{\boldsymbol{m}_{\text{Лип за год}}}{\boldsymbol{m}_{\text{на Землю за год}}} = \frac{\boldsymbol{S}_{\text{Лип}}}{\boldsymbol{S}_{\text{поверх.Земли}}} = \frac{\boldsymbol{S}_{\text{Лип}}}{\boldsymbol{4 \cdot \pi \cdot R_{\oplus}}^{\boldsymbol{2}}}$$

где $\boldsymbol{R}_{\oplus}$ - радиус Земли. Откуда

$$\boldsymbol{m}_{\text{Лип за год}} = \frac{\boldsymbol{S}_{\text{Лип}}}{\boldsymbol{4 \cdot \pi \cdot R_{\oplus}}^{\boldsymbol{2}}} \cdot \boldsymbol{m}_{\text{на Землю за год}}$$

Теперь необходимо умножить полученную величину на время существования Липецка в годах

$$\boldsymbol{t}_{\text{Лип}} = \boldsymbol{2023 - 1703 = 320} \text{ лет}$$

Окончательно, получаем

$$\boldsymbol{M}_{\text{Лип}} = \boldsymbol{m}_{\text{Лип за год}} \cdot \boldsymbol{t}_{\text{Лип}} = \frac{\boldsymbol{S}_{\text{Лип}}}{\boldsymbol{4 \cdot \pi \cdot R_{\oplus}}^{\boldsymbol{2}}} \cdot \boldsymbol{m}_{\text{на Землю за год}} \cdot \boldsymbol{t}_{\text{Лип}}$$

Подставляем числовые данные

$$\boldsymbol{M}_{\text{Лип}} = \frac{\boldsymbol{330,15} \text{ км}^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{4 \cdot 3,14 \cdot (6400} \text{ км}\boldsymbol{)^2}} \cdot \boldsymbol{10^4} \frac{\text{тонн}}{\text{год}} \cdot \boldsymbol{320} \text{ лет} \approx \boldsymbol{2} \text{ тонны}$$

Ответ: примерно $\boldsymbol{2}$ тонны.

Задача № 3.

Период обращения Европы вокруг Юпитера равен $\boldsymbol{3,55}$ суток, а радиус её орбиты составляет $\boldsymbol{671\ 100}$ км. Оцените по этим данным среднюю плотность Юпитера.

Решение.

Запишем третий закон Кеплера, считая, что массой Европы можно пренебречь по сравнению с массой Юпитера

$$\frac{\boldsymbol{T}_{\text{Евр}}{}^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{a}_{\text{Евр}}{}^{\boldsymbol{3}}} = \frac{\boldsymbol{4 \cdot \pi^2}}{\boldsymbol{G \cdot M}_{\text{Юп}}}$$

где $\boldsymbol{T}_{\text{Евр}}$ и $\boldsymbol{a}_{\text{Евр}}$ – период обращения и радиус орбиты Европы соответственно, а $\boldsymbol{M}_{\text{Юп}}$ – масса Юпитера.

Учитывая формулу для плотности и объёма шара имеем

$$\boldsymbol{M}_{\text{Юп}} = \boldsymbol{\rho}_{\text{Юп}} \cdot \boldsymbol{V}_{\text{Юп}} = \boldsymbol{\rho}_{\text{Юп}} \cdot \boldsymbol{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R}_{\text{Юп}}{}^{\boldsymbol{3}}$$

Подставляя в предыдущую формулу и выражая среднюю плотность Юпитера, получим

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{Юп}} = \frac{\boldsymbol{3 \cdot \pi}}{\boldsymbol{G \cdot T^2}} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{a}_{\text{Евр}}}{\boldsymbol{R}_{\text{Юп}}}\right)^{\boldsymbol{3}}$$

Подставляем численные данные

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{Юп}} = \frac{\boldsymbol{3 \cdot 3,14}}{\boldsymbol{6,67 \cdot 10^{-11}}\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \cdot (\boldsymbol{3,55 \cdot 24 \cdot 3600}\ \text{с})^2} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{671\,100}\ \text{км}}{\boldsymbol{71\,492}\ \text{км}}\right)^{\boldsymbol{3}} \approx \boldsymbol{1\,242}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Ответ: примерно $\boldsymbol{1\,242}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Задача № 4.

Искусственный спутник Земли движется в сторону ее вращения по стабильной круговой орбите, высота которой над поверхностью $\boldsymbol{40\,000}$ км. В некоторый момент времени этот спутник наблюдается в зените из Липецка, географические координаты которого $\boldsymbol{\varphi}_{\text{Лип}} = \boldsymbol{52°37'}$, $\boldsymbol{\lambda}_{\text{Лип}} = \boldsymbol{39°36'}$. Вычислите долготу точки на параллели Липецка, над которой пролетит спутник через один оборот.

Решение.

Первый способ.

Вычислим сидерический период $\boldsymbol{T}$ обращения спутника вокруг Земли. Для этого используем третий закон Кеплера. В качестве первого тела возьмём спутник, а в качестве второго Луну.

$$\frac{\boldsymbol{T}^2}{\boldsymbol{T}_{☾}^2} = \frac{\boldsymbol{R}^3}{\boldsymbol{a}_{☾}^3}$$

где $\boldsymbol{R}$ – радиус орбиты спутника, а $\boldsymbol{T}_{☾}$ и $\boldsymbol{a}_{☾}$ - сидерический период обращения Луны вокруг Земли и большая полуось орбиты Луны вокруг Земли соответственно. Радиус орбиты спутника $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{\oplus} + \boldsymbol{H}$, где $\boldsymbol{R}_{\oplus}$ - радиус Земли и $\boldsymbol{H}$ - высота орбиты спутника над поверхностью Земли. В качестве радиуса Земли можно брать непосредственно полярный или экваториальный радиусы (из справочной информации), либо взять приближённое значение $\boldsymbol{6400}$ км. Можно также вычислить средний радиус, как среднее арифметическое экваториального и полярного значений. Тогда

$$\boldsymbol{T} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{R}_{\oplus} + \boldsymbol{H}}{\boldsymbol{a}_{☾}}\right)^{\boldsymbol{3}}} \cdot \boldsymbol{T}_{☾} \approx \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{6\,400}\ \text{км} + \boldsymbol{40\,000}\ \text{км}}{\boldsymbol{384\,400}\ \text{км}}\right)^{\boldsymbol{3}}} \cdot \boldsymbol{27,322}\ \text{сут} \approx \boldsymbol{1,146}\ \text{сут}$$

Второй способ.

Сидерический период $\boldsymbol{T}$ обращения спутника вокруг Земли можно вычислить иначе. Запишем для спутника второй закон Ньютона

$$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{a}_{\text{цс}} = \boldsymbol{F}$$

где $\boldsymbol{m}$ – масса спутника, $\boldsymbol{a}_{\text{цс}}$ – центростремительное ускорение спутника (орбита круговая), $\boldsymbol{F}$ – сила, действующая на спутник. Тогда

$$\boldsymbol{m} \cdot \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{G} \cdot \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{M}_\oplus}{\boldsymbol{R}^2}$$

где $\boldsymbol{v}$ – скорость спутника, $\boldsymbol{R}$ – радиус орбиты спутника, $M_\oplus$ - масса Земли, $\boldsymbol{G}$ – гравитационная постоянная. Откуда имеем

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{M}_\oplus}{\boldsymbol{R}}}$$

Можно сразу написать эту формулу для скорости движения по круговой орбите. Тогда сидерический период обращения спутника

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{R}}{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot (\boldsymbol{R}_\oplus + \boldsymbol{H})^{3/2}}{\sqrt{\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{M}_\oplus}}$$

Дальнейшие вычисления для обоих указанных способов одинаковы.

За время $\boldsymbol{T}$ Земля повернётся на угол

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{T}_\oplus} \cdot \mathbf{360}^\circ = \frac{\mathbf{1{,}146}\ \text{сут}}{\mathbf{0{,}997}\ \text{сут}} \cdot \mathbf{360}^\circ \approx \mathbf{413{,}8}^\circ$$

где $\boldsymbol{T}_\oplus = \mathbf{23}^{\boldsymbol{h}}\mathbf{56}^{\boldsymbol{m}}\mathbf{04}^{\boldsymbol{s}} \approx \mathbf{0{,}997}$ сут – время одного оборота Земли вокруг своей оси относительно звёзд.

Земля сделает больше одного оборота, то есть искомая точка будет западнее Липецка на величину $\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{360}^\circ$. Значит, долгота искомой точки

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_{\text{Лип}} - (\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{360}^\circ) = \mathbf{39}^\circ\mathbf{36}' - \mathbf{413{,}8}^\circ + \mathbf{360}^\circ = \mathbf{39}^\circ\mathbf{36}' - \mathbf{53{,}8}^\circ = \mathbf{39}^\circ\mathbf{36}' - \mathbf{53}^\circ\mathbf{48}'$$
$$= -\mathbf{14}^\circ\mathbf{12}'\text{в. д.} = \mathbf{14}^\circ\mathbf{12}'\text{з. д.}$$

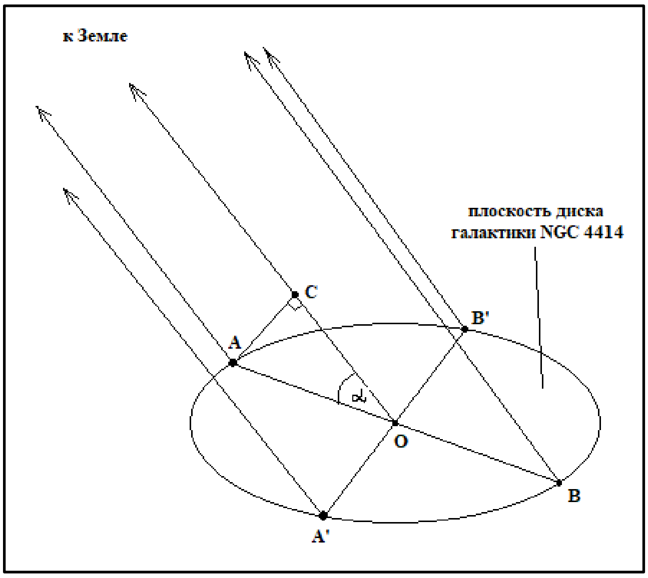
Ответ: около $\mathbf{14}^\circ\mathbf{12}'$з. д.

Задача № 5.

Наблюдая с Земли спиральную галактику $NGC\ 4414$ мы видим эллипс с угловыми размерами $4,4' \times 3,0'$. Оцените угол между плоскостью диска галактики и направлением на Землю (лучом зрения), считая диск галактики кругом.

Решение.

Мы видим галактику эллипсом, потому что смотрим на круглый диск под некоторым углом α, который и нужно вычислить. Сделаем рисунок (смотри ниже): AB (и $A'B'$)– плоскость диска галактики, O – центр галактики, луч OC и параллельные ему – направление к Земле.



AC – это и есть видимый нами меньший радиус галактики, его мы видим под углом $\frac{3,0'}{2} = 1,5'$ (в условии даны угловые диаметры). В перпендикулярном лучу зрения направлении в плоскости галактики $A'B'$её размеры не уменьшаются и радиус галактики ($A'O = AO$), мы видим под углом $\frac{4,4'}{2} = 2,2'$.

Из прямоугольного треугольника ACO искомый угол α равен

$$sin\,\alpha = \frac{AC}{AO}$$

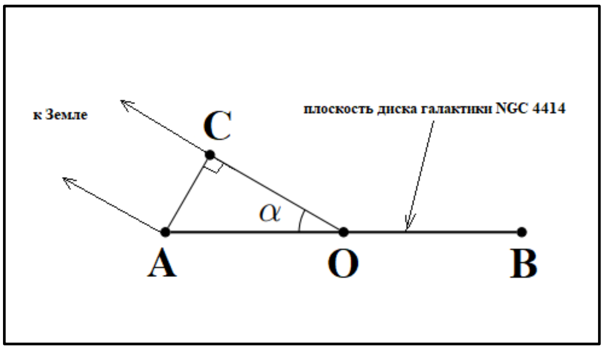
Подставив числовые данные в угловых единицах, получим

$$sin\,\alpha = \frac{1,5'}{2,2'} \approx 0,68$$

Тогда

$$\alpha = arc\sin 0,68 \approx 43°$$

В принципе можно просто построить рисунок аналогичный приведённому выше,



взяв длины отрезков AC и AO равными $1,5$ и $2,2$ единиц длины соответственно и просто измерить искомый угол транспортиром.

Ответ: примерно $43°$.

<u>Задача № 6.</u>

Предельная проницающая способность современных телескопов около $+30^m$. Оцените наибольшее расстояние от Земли, на котором еще можно увидеть звёзды аналогичные Солнцу.

<u>Решение.</u>

Проницающая способность телескопа – это максимальная звёздная величина объекта, который ещё можно увидеть в данный телескоп при данном методе наблюдений.

Изменение блеска звезды в 100 раз соответствует изменению на 5^m её звёздной величины, также известно, что блеск звезды уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния до неё. Тогда при удалении звезды в 10 раз её блеск ослабеет в 100 раз (обратно пропорционально квадрату расстояния), а звёздная величина увеличится на 5^m.

Абсолютная звездная величина Солнца составляет около $+5^m$ (справочные материалы) – это видимая звёздная величина с расстояния 10 парсек. То есть, чтобы Солнце имело звёздную величину 30^m, она должна увеличиться на 25^m, то есть пять раз по 5^m. Значит, расстояние до неё должно вырасти в 10^5 раз.

Если при звёздной величине $+5^m$ расстояние было 10 пк, то при звёздной величине $+30^m$ оно должно стать $10 \cdot 10^5 = 10^6$пк $= 1$ Мпк.

Ответ: примерно 1 Мпк
