Муниципальный этап ВсОШ по астрономии

10 класс. Решения задач

1. Астрономическая карусель

8 баллов

Перед вами четыре утверждения об астрономических явлениях. Укажите, какие из них верны, и обоснуйте свой выбор.

A. Красные звезды более холодные, чем синие.

B. Для наблюдателя на экваторе Луны не бывает незаходящих звезд.

C. Телескопы с самыми большими диаметрами относятся к рефлекторам, а не рефракторам.

D. Восход Луны на Земле и Земли на Луне длится одинаковое время.

Решение.

Рассмотрим подробно каждое из четырех утверждений.

A. Красные звезды более холодные, чем синие. - это действительно так, чем сильнее нагретое тело, тем сильнее смещен максимум излучения в ультрафиолетовую область спектра, по закону смещения Вина. Следовательно данное утверждение - верно.

B. Для наблюдателя на экваторе Луны не бывает незаходящих звезд. Широта экватора составляет $\varphi = 0°$, поэтому все небесные светила с любым склонением будут заходить за горизонт и восходить над ним:

$$\delta > 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 0^\circ \to \delta > 90^\circ$$

Следовательно данное утверждение - верно.

C. Телескопы с самыми большими диаметрами относятся к рефлекторам, а не рефракторам.
Зеркальные телескопы - рефлекторы, являются самыми большими, по-скольку зеркало закрепляют за всю заднюю поверхность, а линзовые в линзовых телескопах - рефракторы за край. Аналогичное объяснение - рефракторы больших диаметров поглощают слишком много света и деформируются под собственной тяжестью. Следовательно утверждение - верно.

D. Восход Луны на Земле и Земли на Луне длится одинаковое время.
Восход связан с двумя явлениями - периодом осевого вращения объекта, где находится наблюдатель, и орбитальным периодом того объекта, который мы наблюдаем, и угловым размером объекта наблюдения. Так как периоды осевого вращения Луны и Земли отличаются, а угловые размеры Солнца одинаковые с большой точностью, то утверждение не является верным.

Ответ. A — Верное, B — Верное, C — Верное, D — Неверное

Критерии оценивания. **8**

Правильное указание о верности или ложности утверждений A–D 8
за каждое с пояснением .... +2
за каждое без пояснений .... +1

2. Звезды в Галактике

8 баллов

В нашей Галактике находится 400 миллиардов звезд, подавляющее большинство из которых находятся в звездном диске. Масса звезд диска составляет $5 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ масс Солнца, а радиус диска - 15 кпк и 300 пк в толщину. Определите:

A. среднюю плотность звездного вещества в галактическом диске в единицах системы СИ

B. среднюю плотность звездного вещества в галактическом диске в массах Солнца на кубический парсек.

C. среднюю концентрацию звезд в диске в штуках на кубический парсек.

Считать, что звезды распределены равномерно внутри диска.

Решение.

Данная задача не кажется сложной. Возможно, ее ключевая сложность – работа с внесистемными единицами измерения расстояния и массы. Определим сначала объем звездного диска. Он представляет из себя цилиндр

$$V_d = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 15000^2 \cdot 300 = 212.1 \cdot 10^9 \text{ пк}^3$$

Поскольку в задаче просят дать ответ во внесистемных единицах измерения, а также в единицах системы СИ, выразим это объем в кубических метрах.

1 парсек это расстояние, при которои одна астрономическая единица видна под углом 1”. В одном парсеке находится 206265 астрономических единиц.

$$1 \text{ пк} = 206'265 \cdot 150'000'000 \text{ км} = 3.1 \cdot 10^{16} \text{ м}$$

Следовательно,объем звездного диска в метрах будет

$$V_d = 212.1 \cdot 10^9 \text{ пк}^3 = 212.1 \cdot 10^9 \cdot (3.1 \cdot 10^{16} \text{ м})^3 = 6.31 \cdot 10^{60} \text{ м}^3$$

Глядя на такие огромные цифры становится понятно, почему астрономы используют внесистемные единицы измерения.

Теперь перейдем к определению средней плотности звездного вещества, для этого всю массу разделим на весь объем. Сначала посчитаем эту величину в массах Солнца на кубический парсек.

$$\rho_1 = \frac{5 \cdot 10^{10}\ M_\odot}{212.1 \cdot 10^9\ \text{пк}^3} = \frac{50}{212.1}\ M_\odot/\text{пк}^3 = 0.24\ M_\odot/\text{пк}^3$$

Теперь сделаем все тоже самое в системе СИ.

$$\rho_2 = \frac{5 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \text{кг}}{6.31 \cdot 10^{60}\ \text{м}^3} = 1.6 \cdot 10^{-20}\ \text{кг/м}^3$$

Ответим на последний вопрос задачи. Определим среднюю концентрацию звезд в звездном диске

$$n = \frac{N}{V} = \frac{400 \cdot 10^9\ \text{штук}}{212.1 \cdot 10^9\ \text{пк}^3} = 1.89\ \text{звезд/пк}^3$$

Ответ. Средняя плотность звездного диска $\rho_1 = 0.24\ M_\odot/\text{пк}^3$, или $\rho = 1.6 \cdot 10^{-20}\ \text{кг/м}^3$, концентрация звезд $n = 1.89$ звезд/пк^3 или 1 звезда на 0.53 пк^3.

Критерии оценивания. 8

Нахождение объема цилиндра и выражение для плотности 1

Нахождение выражения для концентрации 1

Нахождение средней плотности в системе СИ 2

Нахождение средней плотности в массах Солнца на пк^3 2

Нахождение концентрации звезд 2

3. Звезда N

16 баллов

При измерении координат звезды N ее зенитное расстояние оказалось равным 35° при азимуте 180°, а высота Полярной звезды, в этот же момент, оказалась равной 45°. Определите:

A. Склонение звезды.

B. Широту места наблюдений.

C. Высоту звезды в момент верхней кульминации.

D. Высоту звезды в момент нижней кульминации.

E. Сколько времени пройдет между верхней и нижней кульминациями звезды N.

Решение.

Азимут $Az = 180^\circ$ указывает на то, что звезда находится на небесном меридиане, т.е. находится в кульминации. Ее зенитное расстояние $z = 35^\circ$,т.е. ее высота равна $h = 55^\circ$ и она выше, чем высота Полярной звезды. Это указывает на то, что кульминация верхняя к северу от зенита. Широта места наблюдения равна высоте Полярной Звезды, т.е $\varphi = 45^\circ$. Теперь можем найти склонение звезды:

$$h_\uparrow = 90^\circ + \varphi - \delta \rightarrow \delta = 90^\circ + 45^\circ - 55^\circ = 80^\circ$$

Теперь найдем нижнюю кульминацию звезды:

$$h_\downarrow = -90^\circ + \varphi + \delta = -90^\circ + 45^\circ + 80^\circ = 35^\circ$$

Звезды кульминируют в одной и той же кульминации с периодом звездный суток $T = 23$ ч 56 м 04 с, периодом обращения Земли относительно далеких звезд. Так как меридиан делит небо на равные половины, то время между верхней и нижней кульминацией составит половину от звездных суток - $t = 11$ ч 58 м 02 с

Ответ. Склонение звезды $\delta = 80°$, высоту звезды в момент верхней кульминации $h_{\uparrow} = 55°$, в момент нижней кульминации $h_{\downarrow} = 35°$, время между верхней и нижней кульминациями звезды пройдет $t = 11$ ч 58 м 02 с

Критерии оценивания. **16**

Определена широта места наблюдения 2
Найдена высота звезды в момент верхней кульминации 5
Найдена высота звезды в момент нижней кульминации 5
Найдено время между верхней и нижней кульминациями 4

4. Тусклая система 16 баллов

Алгебраическая сумма звездных величин звезд в двойной системе составляет ровно 5^m. Какого максимального значения может достигать их суммарная звездная величина? Чему равны видимые звездные величины звезд для этого случая?

Решение.

Пусть E_0 — освещенность от звезды нулевой звездной величины (можно считать что это Вега). В этом случае, сравнивая с ней по формуле Погсона найдем для любой звезды:

$$m = -2.5 \log \frac{E}{E_0}$$

Запишем теперь формулы для алгебраической суммы звезд и для суммарной звездной величины через освещенности звезд:

$$m_1 + m_2 = -2.5 \log \frac{E_1}{E_0} - 2.5 \log \frac{E_2}{E_0} = -2.5 \log \frac{E_1 E_2}{E_0^2}$$

$$m_\Sigma = -2.5 \log \frac{E_1 + E_2}{E_0}$$

Легко видеть, что если мы фиксируем алгебраическую сумму звездных величин, это соответствует фиксации произведения освещенностей. По условию задачи нам нужно найти минимум их суммы. Тут, по сути, задача формулируется геометрически: из всех прямоугольников заданной площади нужно найти тот, у которого наименьший периметр. Таким прямоугольником будет являться квадрат, и это легко доказать даже без взятия производных. Пусть a — сторона искомого квадрата. Изменим стороны на величины a_1 и a_2 (эти величины могут быть как положительны, так и отрицательны, но точно ненулевые) и запишем условие постоянства площади:

$$a^2 = (a + a_1)(a + a_2) = a^2 + a(a_1 + a_2) + a_1 a_2$$

Отсюда:

$$a(a_1 + a_2) + a_1 a_2 = 0$$

Пусть $a_1 + a_2 < 0$. Тогда, $a_1 a_2 > 0$, а значит знак a_1 и a_2 одинаковый. Очевидно, они оба могут быть только отрицательны, поскольку их сумма отрицательна. Но если и a_1 и a_2 отрицательны, получается полный абсурд: мы уменьшили обе стороны квадрата и получили прямоугольник той же площади, что, очевидно, невозможно. Тогда, $a_1 + a_2 > 0$. Остается лишь заметить, что изменение периметра квадрата это $2(a_1 + a_2)$, и оно положительно в любом случае. То есть, периметр квадрата минимален из всех возможных прямоугольников данной площади.

Возвращаясь к нашей задаче, легко видеть, что E_1+E_2 минимально при условии постоянства E_1E_2 если $E_1 = E_2$. Сразу получаем, что в этом случае:

$$m_1 = m_2 = 2.5^m$$

Легко посчитать m_Σ:

$$m_\sigma - m_1 = -2.5 \log \frac{E_1 + E_2}{E_1} = -2.5 \log 2$$

$$m_\sigma = m_1 - 2.5 \log \frac{E_1 + E_2}{E_1} = m_1 - 2.5 \log 2 = 1.75^m$$

Отсюда, $m_\Sigma = 1.75^m$

Ответ. $m_1 = m_2 = 2.5^m$, $m_\Sigma = 1.75^m$.

Критерии оценивания. **16**

Запись формулы Погсона 3
Нахождение максимума звездной величины (освещенности) 3
Обоснование того, что именно это максимум 6
Ответы для суммарной звездной величины и для видимых звездных величин 4

5. Шаровое скопление 16 баллов

Определите количество звезд в шаровом звездном скоплении, если известно, что диаметр скопления составляет $D = 40$ пк, а скорость убегания звезд из него, на его краю, составляет 8 км/с. Считать, что все звезды в шаровом скопление распределены равномерно и имеют одинаковую массу $M = 0.7M_\odot$ массы Солнца. Какова масса всего скопления в массах Солнца.

Решение.

Скорость убегания на краю скопления является второй космической скоростью для него. Так же обратим внимание, что радиус скопления $R = 20$пк. Следовательно полная масса скопления будет:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2GM_{\text{Скопления}}}{R_{\text{Скопления}}}}$$

$$M_{\text{Скопления}} = \frac{V_2^2 R_{\text{Скопления}}}{2G} = \frac{8000^2 \cdot 20 \cdot 206265 \cdot 1.5 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11}} = 2.97 \cdot 10^{35}\ \text{кг} = 1.48 \cdot 10^5 M$$

Определим число звезд в скоплении, разделив общую массу скопления на массу отдельной звезды:

$$N = \frac{M_{\text{Скопления}}}{0.7 M_\odot} = \frac{2.97 \cdot 10^{35}}{0.7 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}} = 213102 \approx 213000$$

Ответ. Количество звезд в шаровом звездном скоплении с массой $M = 0.7M_\odot$ составляет $N = 213102 \approx 213000$ Масса скопления составляет $M_{\text{Скопления}} = 1.48 \cdot 10^5 M_\odot$

Критерии оценивания. **16**

Понимание, что скорость убегания это вторая космическая скорость 2
Выражение для второй космической скорости 3
Учет того, что масса всех звезд и есть масса скопления 2
Вывод выраж-я для массы скопления через скорость убегания 3
Подсчет массы всего скопления 3
Подсчет числа звезд в скоплении 3

6. Телескоп Гюйгенса

16 баллов

В 1665 г Христиан Гюйгенс описал кольца Сатурна. Свои наблюдения он проводил с помощью телескопа системы Кеплера, объектив которого равен 5 см, фокусное расстояние объектива 3.6 м, кратность достигала 50, а поле зрения окуляра 40°. Определите:

A. Чему равна длина телескопа?

B. Во сколько раз поле зрения телескопа больше углового размера Сатурна с кольцами в противостоянии? Диаметр колец Сатурна $D_k = 250000$ км

C. Во сколько раз больший диаметр объектива нужен, чтобы обнаружить щель Кассини? Угловой размер щели Кассини составляет в противостоянии $\theta = 0,65''$

Решение.

Телескоп Гюйгенса был собран по схеме Кеплера и его длина равна сумме фокусных расстояний объектива и окуляра. Фокусное расстояние объектива равно:

$$F = 3.6 \text{ м}$$

Фокусное расстояние окуляра составило:

$$f = \frac{F}{\Gamma} = \frac{360}{50} \approx 7.2 \text{ см}$$

Длина телескопа:

$$L = 3.6 + 0.07 = 3.67 \text{ м}$$

Поле зрения телескопа составило:

$$\theta = \frac{\alpha_{\text{Окуляра}}}{\Gamma} = \frac{40}{50} = 0.8^\circ = 2880''$$

Проверим как соотносятся поле зрения и угловой размер колец Сатурна $D_k = 250000$ км:

$$\theta_k = \frac{D_k}{a_{\text{Сатурн}} - a_{\oplus}} = \frac{250000}{1.2 \cdot 10^9} = 0.0002 = 43''$$

Поле зрения телескопа больше в $\frac{2880''}{43''} = 67$ раз. Теперь определим разрешающую способность телескопа:

$$\beta = 1.22 \cdot 206265'' \frac{\lambda}{D} = 1.22 \cdot 206265'' \frac{50\ \text{нм}}{50\ \text{мм}} = 2.8''$$

В такой телескоп щель Кассини с угловым размером $0.65''$ не видна. Нужен диаметр объектива более чем в 4.31 раза больший, т.е. более 215 мм.

Ответ. Длина телескопа $L = 3.6 + 0.07 = 3.67$ м, поле зрения телескопа больше в 67 раз, чтобы обнаружить щель Кассини нужен диаметр объектива более чем в 4.31 раза больший, чем 5 см.

Критерии оценивания. **16**

Найдено фокусное расстояние окуляра 2
Найдена длина телескопа 2
Найдено поле зрения телескопа 2
Найден угловой размер Сатурна с кольцами в противостоянии 2
Если не правильно взято расстояние до Сатурна 1
Определено во сколько раз больше поле зрения телескопа 2
Найдено угловое разрешение телескопа 4
Определено во сколько раз больший телескоп нужен 2

7. Спектральная линия

20 баллов

В удаленной обсерватории на одной из планет Солнечной системы астрономы проводили наблюдения некоторой спектральной линии у астероида. Вам представлены результаты этих наблюдений на графике. Определите:

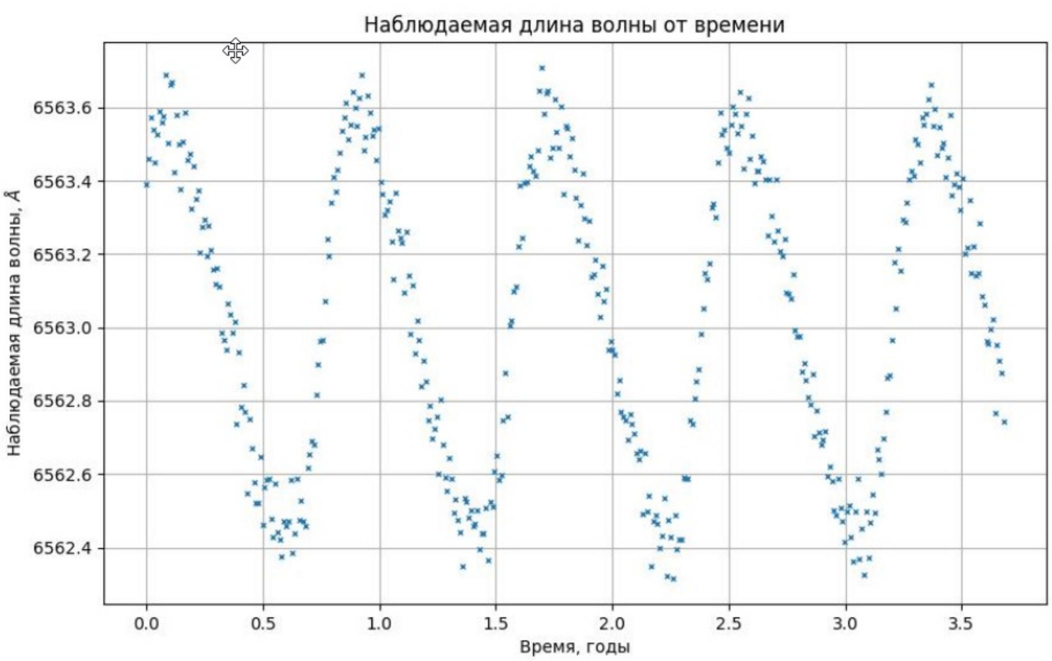
A. Чему равна лабораторная длина волны, за которой ведётся наблюдение?

B. С какой планеты (назовите её) проводились наблюдения?

C. За каким астероидом (укажите радиус его орбиты) ведётся наблюдение?

Орбиты планет и астероида считайте круговыми, лежащими в одной плоскости, при этом неизвестно, прямое обращение у астероида или обратное. Измерения и построения проводите на бланке для решений с картой или графиком, и сдайте его вместе с работой.

Рис. 1: График наблюдаемой длины волны от времени



Решение.

Заметим, что при движении по круговым орбитам максимальная и минимальная радиальные скорости равны по модулю. Значит, лабораторная длина волны может быть вычислена так:

$$\lambda = \frac{\lambda_{max} + \lambda_{min}}{2} \approx 6563\text{Å}$$

Это длина волны линии H_α

На графике три синодических периода равны 2.5 годам. Значит, синодический период планеты и астероида равен:

$$T = \frac{5}{6} = 0.83\text{года}$$

Максимум модуля радиальной скорости достигается в квадратуре. По графику можно определить отношение времени, проходящего между ближайшими разноименными квадратурами к синодическому периоду. Измерим его и получим:

$$x = \frac{T_{min}}{S} = 0.41$$

Из доли периода можно найти угол с вершиной в Солнце, на сторонах которого лежат планета и астероид в момент квадратуры.

$$\alpha = 360^\circ \frac{x}{2} = 74^\circ$$

Из прямоугольного треугольника с вершинами в Солнце, планете и астероиде получим соотношение радиусов орбит астероида и планеты:

$$\frac{a_1}{a_2} = \cos(\alpha) = 0.28$$

$$\frac{T_1}{T_2} = 0.15$$

- **Прямое вращение:**

$$S = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = T_1 \frac{0.15}{1 - 0.15}$$

$$T_1 = S\frac{1 - 0.15}{0.15} = 4.7\text{года} \rightarrow a_1 = 2.8\text{а.е.}, a_2 = 0.79\text{а.е.}$$

Очевидно, что $a = 2.8$ а.е. не подходит ни для одной планеты, а вот $a = 0.79$ а.е. похоже на Венеру. Следовательно, можем уточнить пару решений: $a_1 = \frac{0.72}{0.28} = 2.57$ а.е. и $a_2 = 0.72$ а.е., планета - Венера.

- **Обратное вращение:**

$$S = \frac{T_1 T_2}{T_2 + T_1} = T_1 \frac{0.15}{1 + 0.15}$$

$$T_1 = S\frac{1 + 0.15}{0.15} = 6.4\text{года} \rightarrow a_1 = 3.4\text{а.е.}, a_2 = 0.96\text{а.е.}$$

$a = 3.4$ а.е. не подходит ни для одной планеты, а вот $a = 0.96$ а.е. близко к Земному радиусу орбиты. Следовательно, можем уточнить пару решений: $a_1 = \frac{1}{0.28} = 3.57$ а.е. и $a_2 = 1$ а.е., планета - Земля.

Осталось понять, какая пара решений действительно подходит. Для этого по графику измерим амплитуду изменения радиальной скорости:

$$\frac{\Delta\lambda_{max}}{\lambda} = \frac{v_{rmax}}{c} \rightarrow v_{rmax} = 27\text{км/с}$$

Эта скорость меньше скорости Земли вокруг Солнца, а в паре решений с Землёй обращение у астероида обратное, поэтому максимальная радиальная скорость будет больше земной. Для пары решений с Землей максимальная радиальная скорость равна 36 км/с $>$ 27 км/с.

Делаем вывод, что обращение прямое, планета - Венера, а радиус орбиты астероида 2.57 а.е. Если посчитать, получается лучевая скорость равная 26 км/с $\sim$ 27 км/с.

Ответ. Лабораторная длина волны составляет $\lambda_0 = 6563\,\text{Å}$, планета, где находится наблюдатель - Венера, большая полуось орбиты астероида $a = 2.57$ а.е.

Критерии оценивания. **20**

Найдена лабораторная длина волны 2
Верное рассмотрение решений с прямым и обратным вращением астер-да 2×4
Правильное исключение не подходящих решений с обоснованием 4
Найден период обращения астероида 2
Найдена планета наблюдений 2
Найдена радиус орбиты астероида 2