

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ**10 класс****10.1. Пульсар PSR B0531+21**

Пульсар PSR B0531+21 находится в центре знаменитой Крабовидной туманности в Тельце, остатка от взрыва сверхновой SN 1054. Период вращения пульсара 33 мс. Определите его плотность.

Гравитационная постоянная: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$.

Решение**Способ I**

Используем третий уточнённый закон Кеплера, $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$, **(2 балла)**

где M – масса пульсара, T – период вращения точки массой m на поверхности пульсара

(сферы радиуса a), $m \ll M \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$. **(2 балла)**

Плотность пульсара $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi a^3}$, **(1 балл)**

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}, \quad \textbf{(1 балл)}$$

$$\rho = \frac{3 \cdot 3,14}{6,67 \cdot 10^{-11} (3,3 \cdot 10^{-2})^2} = 1,3 \cdot 10^{14} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad \textbf{(2 балла)}$$

Способ II

Закон всемирного тяготения $F = G \frac{mM}{r^2}$, **(1 балл)**

где M – масса пульсара, m – точки на поверхности пульсара, r – радиус пульсара.

Второй закон Ньютона $G \frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r$, **(1 балл)**

угловая скорость $\omega = \frac{2\pi}{T}$, **(1 балл)**

$$G \frac{M}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}, \quad \textbf{(1 балл)}$$

Плотность пульсара $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi a^3}$, **(1 балл)**

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}, \quad \textbf{(1 балл)}$$

$$\rho = 1,3 \cdot 10^{14} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad \textbf{(2 балла)}$$

10.2. Сатурн

Радиус орбиты Сатурна в радиусах орбиты Земли $R = 9,5388R_{\oplus}$. Определите период обращения Юпитера вокруг Солнца.

Орбитальный период обращения Земли: $T_{\oplus} = 1$ звёздный год.

Решение

Способ I

Используем третий закон Кеплера, $\frac{T^2}{T_{\oplus}^2} = \frac{a^3}{a_{\oplus}^3}$ (4 балла)

$$\frac{T^2}{T_{\oplus}^2} = \frac{9,5388^3 R_{\oplus}^3}{R_{\oplus}^3}, \quad (2 \text{ балла})$$

$T_{\oplus} = 1$ год, $T = \sqrt{9,5388^3} = 29,5$ лет. (2 балла)

Способ II

$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad (1 \text{ балл})$$

где M – масса центрального тела (Солнца), m – масса планеты, r – радиус орбиты планеты.

$$G \frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r, \quad (1 \text{ балл})$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (1 \text{ балл})$$

$$G \frac{M_{\odot}}{R^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}, \quad G \frac{M_{\odot}}{R_{\oplus}^3} = \frac{4\pi^2}{T_{\oplus}^2} \quad (1 \text{ балл})$$

$$\frac{T^2}{T_{\oplus}^2} = \frac{9,5388^3 R_{\oplus}^3}{R_{\oplus}^3}, \quad (2 \text{ балла})$$

$T_{\oplus} = 1$ год, $T = \sqrt{9,5388^3} = 29,5$ лет. (2 балла)

10.3. Точка Лагранжа

Определите положение точки Лагранжа L1 в системе Земля – Луна (от центра Земли в земных радиусах). Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, расстояние Луны от Земли составляет около 60 земных радиусов. В точке Лагранжа L1, между центрами масс двух тел, гравитационные ускорения двух тел численно равны между собой, но имеют противоположные направления.

Решение

На тело массы m действуют силы $F_{\oplus} = G \frac{mM_{\oplus}}{r_{\oplus}^2}$, $F_{\zeta} = G \frac{mM_{\zeta}}{r_{\zeta}^2}$. (2 балла)

$$M_{\oplus} = 81M_{\zeta}, \quad F_{\oplus} = F_{\zeta}, \quad r_{\oplus} + r_{\zeta} = 60R_{\oplus}. \quad (2 \text{ балла})$$

$$\frac{81}{r_{\oplus}^2} = \frac{1}{(60R_{\oplus} - r_{\oplus})^2}, \quad (2 \text{ балла})$$

$r_{\oplus} = 54R_{\oplus}$ и $r_{\oplus} = 67,5R_{\oplus}$ (второй корень не удовлетворяет условию $r_{\oplus} < 60R_{\oplus}$, это точка L2),

$\Rightarrow r_{\oplus} = 54R_{\oplus}$. (2 балла)

10.4. Астероид 2022 VR1

Околоземный астероид 2022 VR1 пролетит мимо Земли в ночь с 16 на 17 ноября 2024 года. Его орбитальный период обращения $T = 364,27$ сут. Считая орбиту астероида круговой, вычислите её радиус и геоцентрическое расстояние. Результат не должен пугать, вследствие вытянутости орбиты, реальное расстояние, на котором пройдёт астероид больше в 35,5 раз. Определите действительное расстояние сближения астероида с Землёй. Орбитальный период обращения Земли: $T_{\oplus} = 365,26$ сут. = 1 звёздный год, радиус орбиты Земли: $a_{\oplus} = 1,0000$ а.е., астрономическая единица: $1 \text{ а.е.} = 1,496 \cdot 10^8 \text{ км}$.

Решение

Используя третий закон Кеплера, $\frac{T^2}{T_{\oplus}^2} = \frac{a^3}{a_{\oplus}^3}$ (2 балла)

$T_{\oplus} = 365,26$ сут. = 1 звёздный год, $a_{\oplus} = 1,0000$ а.е., $\Rightarrow T^2[\text{годы}] = a^3[\text{а.е.}]$

$$T = \frac{364,27}{365,26} = 0,99729 \text{ года.} \quad (1 \text{ балл})$$

$$a = \sqrt[3]{T^2}, \quad (1 \text{ балл})$$

$$a = \sqrt[3]{0,99729^2} = 0,99819 \text{ а.е.} \quad (2 \text{ балла})$$

Геоцентрическое расстояние астероида $\rho = a_{\oplus} - a$, (1 балл)

$$\rho = 0,00174 \text{ а.е.} = 2,7078 \cdot 10^5 \text{ км.}$$

Это расстояние меньше радиуса орбиты Луны, однако действительное расстояние

$$\rho_d = 35,5 \cdot 2,7078 \cdot 10^5 = 9,61 \cdot 10^6 \text{ км.} \quad (1 \text{ балл})$$

10.5. Крюгер 60

Определите (в единицах солнечных масс $M_{\odot}$) массу двойной звёздной системы Крюгер 60 в созвездии Цфея и массу его компонентов, период обращения которых 44,3 года, расстояние между ними 9,535 а.е., а отношение расстояний компонент от их общего центра масс 2:3.

Решение

Расстояние между компонентами двойной звезды $a = a_1 + a_2$, (1 балл)

третий уточнённый закон Кеплера $m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$, (1 балл)

Масса Солнца $M_{\odot} = \frac{4\pi^2 a_{\oplus}^3}{GT_{\oplus}^2}$, (1 балл)

$$\frac{m_1 + m_2}{M_{\odot}} = \frac{a^3 T_{\oplus}^2}{a_{\oplus}^3 T^2},$$

Если a в а.е., $a_{\oplus} = 1$ а.е., T в звёздных годах, $T_{\oplus} = 1$ звёздный год,

$$\frac{m_1 + m_2}{M_{\odot}} = \frac{a^3}{T^2}. \quad (1 \text{ балл})$$

Примечание. Если решение начинается с последней, записанной выше, формулы, выставляется 4 балла за этот этап решения.

$$m_1 + m_2 = \frac{a^3}{T^2} M_{\odot}, \quad m_1 + m_2 = \frac{9,535^3}{44,3^2} M_{\odot} = 0,442 M_{\odot}, \quad (1 \text{ балл})$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}, \quad m_1 = \frac{3}{2} m_2. \quad (2 \text{ балла})$$

$$\frac{5}{2} m_2 = 0,442 M_{\odot}, \quad m_2 = 0,177 M_{\odot}, \quad m_1 = 0,265 M_{\odot}. \quad (1 \text{ балл})$$

10.6. Денеб

Расстояние от звезды Денеба (α Лебедя) до Земли свет проходит за 652 года. Определите параллакс Денеба.

Скорость света в вакууме: $c = 2,998 \cdot 10^5$ км/с,

1 год = $3,16 \cdot 10^7$ с,

парсек $1 \text{ пк} \approx 3,086 \cdot 10^{13}$ км.

Решение

Расстояние от Денеба до Земли $r = 652$ световых года,

(1 балл)

Связь параллакса звезды (в угловых секундах) с расстоянием до неё (в парсеках)

$$\pi'' = \frac{1}{r[\text{пк}]}.$$

(4 балла)

$$1 \text{ св. год} = 2,998 \cdot 10^5 \cdot 3,16 \cdot 10^7 = 9,47 \cdot 10^{12} \text{ км},$$

(1 балл)

$$1 \text{ пк} = 3,26 \text{ св. года}$$

(1 балл)

$$r = 200 \text{ пк.}$$

$$\pi'' = 0'',005.$$

(1 балл)