

11 класс

Задача 1

В исламском лунном календаре год состоит из 12 лунных месяцев, половина из которых состоит из 29 дней, половина – из 30 дней. За 30 лет в календарь вставляется 11 високосных дней. Определить, за какой промежуток времени в лунном календаре набегит лишний год по сравнению с григорианским календарем.

Решение:

Лунный год T_L в исламском календаре составляет 12 лунных месяцев по 29.5 дней, то есть 354 дней, плюс еще $(11/30)$ дней за счет добавления 11 високосных суток за 30 лет. Получившееся значение (354.3667 дней) практически совпадает с продолжительностью 12 синодических лунных периодов. Но эта величина на 10.8758 дней меньше продолжительности года по григорианскому календарю T_G . Предположим, что за N григорианских лет прошло $(N+1)$ лет по лунному календарю. Тогда

$$N \cdot T_G = (N + 1) \cdot T_L; \quad N = \frac{T_L}{T_G - T_L} = 32.58.$$

В итоге разница между исламским лунным и григорианским календарем составит целый год по прошествии 32.58 лет по григорианскому календарю или, то же самое, 33.58 лет по лунному календарю.

Критерии оценивания:

| | |
|---|-----------------|
| Рассчитана связь между лунным годом и григорианским | 4 балла |
| Дан итоговый ответ | 4 балла |
| Итого | 8 баллов |

Задача 2

Масса атмосферы Венеры составляет $4.8 \cdot 10^{20}$ кг. В ней на каждые 1000 молекул приходится 965 молекул углекислого газа CO_2 и 35 молекул азота N_2 . 97% массы атмосферы Титана приходится на долю азота и 3% – на долю метана CH_4 . Атмосферное давление на поверхности Титана в полтора раза превышает атмосферное давление на поверхности Земли. В какой из атмосфер масса азота больше и во сколько раз?

Решение:

Рассчитаем сначала массу азота в атмосфере Венеры. Масса газа может быть выражена через число молекул N , молярную массу этого газа M и число Авогадро N_A следующим образом:

$$m = \frac{N}{N_A} M$$

Запишем отношение массы азота в атмосфере Венеры к массе всей её атмосферы:

$$\frac{m_{N_2}}{m_{атм}} = \frac{N_{N_2}}{N_{атм}} \cdot \frac{M_{N_2}}{M_{атм}}$$

Отношение числа молекул азота к числу всех частиц в атмосфере дано в условии. Молярная масса азота равна 0.028 кг/моль. Молярная масса газа атмосферы Венеры будет очень близка к молярной массе углекислого газа (0.044 кг/моль), поскольку он является основным компонентом атмосферы. Если учесть примесь азота, то значение молярной массы практически не изменится (0.0434 кг/моль). Получаем, что масса азота в атмосфере Венеры равна 10^{19} кг.

Массу атмосферы Титана можно вычислить из следующих соображений. Вся масса атмосферы $m_{атм}$ давит на всю поверхность Титана:

$$p = \frac{m_{атм} g}{S} = \frac{m_{атм} GM}{4\pi R^4}$$

Здесь g – ускорение свободного падения на поверхности Титана, M и R – масса и радиус Титана. Масса атмосферы равна

$$m_{атм} = \frac{4\pi p R^4}{GM}$$

или $9 \cdot 10^{18}$ кг. Это примерно равно массе азота в атмосфере Венеры, а сама атмосфера Титана состоит из азота практически полностью. В итоге, масса азота в атмосфере Венеры совсем незначительна (примерно на 10%) больше, чем в атмосфере Титана.

Критерии оценивания:

| | |
|---|---------|
| Рассчитана масса азота в атмосфере Венеры | 3 балла |
| Рассчитана масса азота в атмосфере Титана | 3 балла |

| | |
|--------------------|-----------------|
| Дан итоговый ответ | 2 балла |
| Итого | 8 баллов |

Задача 3

Блеск Венеры в момент наибольшей элонгации равен -4.5^m (фаза 0.5, угловой диаметр $24''$), а Сириуса -1.5^m . Сравните их поверхностную яркость для наблюдателя с телескопом диаметром 100 мм и увеличением 100 крат. Влиянием атмосферы пренебречь, разрешающую способность глаза принять равной $1'$.

Решение:

Определим, какую угловую площадь будут иметь Венера и Сириус при наблюдении в данный телескоп. Диаметр дифракционного диска для диаметра телескопа D составляет

$$\delta = \frac{0.14''}{D (m)} = 1.4''$$

При увеличении в 100 крат этот диск будет иметь размеры в $140''$, что больше разрешающей способности глаза. Следовательно, дифракционная картина будет заметна в телескоп для Сириуса, и он будет наблюдаться как полный диск диаметром δ , равным $1.4''$ ($140''$ с учетом увеличения). Размеры дифракционного диска существенно меньше видимых размеров Венеры, и последняя будет наблюдаться в своем истинном виде – как половинка диска с размером d , равным $24''$ ($2400''$ с учетом увеличения). Соотношение видимых площадей Венеры и Сириуса составит

$$\frac{S}{s} = \frac{\pi(d/2)^2/2}{\pi(\delta/2)^2} = \frac{d^2}{2\delta^2} = 147$$

При этом Венера на 3 звездных величины или в 15.8 раз ярче Сириуса. Получается, что поверхностная яркость Венеры примерно в 9 раз меньше поверхностной яркости Сириуса

Критерии оценивания:

| | |
|--|-----------------|
| Рассчитана формула для диаметра дифракционного диска | 4 балла |
| Найдено соотношение видимых площадей | 2 балла |
| Дан итоговый ответ | 2 балла |
| Итого | 8 баллов |

Задача 4

Увидев 21 марта в истинный полдень радугу, астроном заметил, что вершина радуги находится в 12° над горизонтом. На какой широте это происходило, если угловой радиус радуги составляет 42° ?

Решение:

Если угловой радиус радуги составляет 42° и её вершина находится в 12° над горизонтом, то центр радуги расположен в 30° под горизонтом. Центр радуги – это точка, противоположная Солнцу. Соответственно, получается, что Солнце в истинный полдень (для Солнца это означает, что оно находилось в верхней кульминации) в день весеннего равноденствия (склонение Солнца $\delta = 0^\circ$) находилось на высоте 30° над горизонтом. Для простоты посчитаем случай для северного полушария, а потом, воспользовавшись симметричностью задачи, обобщим на южное. $h = 90^\circ - \varphi + \delta$. Отсюда: $\varphi = \pm 60^\circ$ (знак « \rightarrow » добавлен для Южного полушария). Ответ: на широте $\varphi = \pm 60^\circ$ (т.е. 60 с.ш. или 60 ю.ш.).

Критерии оценивания:

| | |
|---|-----------------|
| Понимание того, что положение центра радуги на небе противоположно положению Солнца | 1 балл |
| Определение высоты центра радуги над горизонтом | 2 балла |
| Понимание того, что в описанный день склонение Солнца равно 0° | 1 балл |
| Понимание того, что в описанный момент Солнце было в верхней кульминации | 1 балл |
| Запись формулы для верхней кульминации | 1 балл |
| Получение верного ответа для Северного полушария Земли | 1 балл |
| Получение верного ответа для Южного полушария Земли | 1 балл |
| Итого | 8 баллов |

Задача 5

На далекой обитаемой планете условия аналогичны земным, но местное Солнце имеет вдвое меньший угловой диаметр. Найдите температуру этой далекой звезды.

Решение:

Пусть T_0 – температура Солнца, R_0 – его радиус, D_0 – расстояние от Солнца до Земли, а T , R и D – аналогичные характеристики далекой звезды и ее планеты. Учитывая, что энерговыделение звезды пропорционально четвертой степени ее температуры и квадрату радиуса (по закону Стефана-Больцмана), мы можем записать условие равенства температур на Земле и далекой планете как

$$\frac{T^4 R^2}{D^2} = \frac{T_0^4 R_0^2}{D_0^2}.$$

При этом, звезда при наблюдении с планеты имеет вдвое меньший угловой диаметр, чем Солнце при наблюдении с Земли:

$$\frac{R}{D} = \frac{R_0}{2D_0}.$$

Подставляя второе уравнение в первое, получаем:

$$T = T_0\sqrt{2}$$

Или около 8500 К.

Критерии оценивания:

| | |
|--|-----------------|
| Записан закон Стефана-Больцмана | 4 балла |
| Правильно использовано отношение диаметров | 2 балла |
| Дан итоговый ответ | 2 балла |
| Итого | 8 баллов |

Задача 5

На далекой обитаемой планете условия аналогичны земным, но местное Солнце имеет вдвое меньший угловой диаметр. Найдите температуру этой далекой звезды.

Решение:

Пусть T_0 – температура Солнца, R_0 – его радиус, D_0 – расстояние от Солнца до Земли, а T , R и D – аналогичные характеристики далекой звезды и ее планеты. Учитывая, что энерговыделение звезды пропорционально четвертой степени ее температуры и квадрату радиуса (по закону Стефана-Больцмана), мы можем записать условие равенства температур на Земле и далекой планете как

$$\frac{T^4 R^2}{D^2} = \frac{T_0^4 R_0^2}{D_0^2}.$$

При этом, звезда при наблюдении с планеты имеет вдвое меньший угловой диаметр, чем Солнце при наблюдении с Земли:

$$\frac{R}{D} = \frac{R_0}{2D_0}.$$

Подставляя второе уравнение в первое, получаем:

$$T = T_0\sqrt{2}$$

Или около 8500 К.

| Критерии оценивания | баллы |
|--|--------------|
| Рассмотрена ситуация для солнечного затмения и указана фаза Луны | 2 |
| Сделан вывод о невозможности наблюдения Луны | 2 |
| Рассмотрена ситуация для лунного затмения и указана фаза Луны | 2 |
| Сделан вывод, что молодая Луна будет в южной части неба | 2 |
| Итого | 8 |