1. Астрономическая карусель

8 баллов

Перед вами четыре утверждения об астрономических явлениях. Укажите, какие из них верны и обоснуйте свой выбор.

A. Содержание гелия в Солнце падает со временем.

B. Земля ближе всего к Солнцу, когда в северном полушарии зима.

C. Кольцеобразные затмения могут происходить только при полной Луне.

D. Солнце кажется краснее на закате только, если в атмосфере есть пыль.

Решение.

Рассмотрим подробно каждое из четырех утверждений.

A. Содержание гелия в Солнце падает со временем.
В Солнце водород, в термоядерных реакция, перерабатывается в гелий, поэтому содержание гелия в Солнце растет со временем. Следовательно данное утверждение - не верно.

B. Земля ближе всего к Солнцу, когда в северном полушарии зима.
Да Солнце проходит ближнюю точку своей орбиты к Солнцу 4 января. Следовательно данное утверждение - верно.

C. Кольцеобразные солнечные затмения могут происходить только при полной Луне.
Солнечные затмения могут происходить только в новолуние. Так как Луна должна быть между Солнцем и Землей. Следовательно утверждение - не верно.

D. Солнце кажется краснее на закате только, если в атмосфере есть пыль.
Нет это не так, пыль конечно сильно улучшает рассеяние, но и без пыли сам воздух при большой толщине рассеивает свет, особенно голубую часть спектра. Именно поэтому ясное небо у нас синее. Следовательно данное утверждение - не верно.

Ответ. A — Не верное, B — Верное, C — Не верное, D — Не верное

Критерии оценивания.	**8**
Правильное указание о верности или ложности утверждений A–D	8
за каждое с пояснением .... +2	
за каждое без пояснений .... +1	

2. ε Эридана 8 баллов

При прослушивании радиосигналов по программе SETI (поиска внеземных цивилизаций) удалось зафиксировать сигнал от инопланетной цивилизации. В результате расшифровки удалось узнать, что сигнал шел до Земли 10.5 лет, а радиоисточник обращается по круговой орбите 3.39 а.е. с периодом 6.85 лет. Определите

A. Параллакс Солнца при наблюдении с планеты в системе ε Эридана.

B. Массу звезды в массах Солнца, вокруг которой обращается населенная планета.

Решение.

Определим расстояние до системы ε Эридана в пк:

$$R = \frac{10.5}{3.26} = 3.22 \text{ пк}$$

Следовательно параллакс системы при наблюдении с Солнца:

$$R = \frac{1''}{\pi} \rightarrow \pi = \frac{1''}{R} = 0.31''$$

Из принципа обратимости следует, что в планетной системе масштаб будет:

$$1 \text{ а.е.} \rightarrow 0.31''$$

Следовательно, по определению параллакса, так как планета, обращается по орбите с большой полуосью 3.39 а.е. Найдем значение параллакса при наблюдении из системы ε Эридана:

$$\pi_{\odot} = 3.39 \cdot 0.31 = 1.05''$$

Найдем массу звезды через уточненный 3-й Закон Кеплера:

$$\frac{M}{M_\odot} = \left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^{-2}\left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^3 = \left(\frac{6.85}{1}\right)^{-2}\left(\frac{3.39}{1}\right)^3 = 0.83$$

Следовательно $M = 0.83M_\odot$

Ответ. Параллакс Солнца при наблюдении из системы ε Эридана $\pi = 0.31''$, масса звезды $M = 0.83M_\odot$.

Критерии оценивания. **8**

Нахождение параллакса Солнца при наблюдении из системы ε Эридана 3

Перевод в пк 2

Нахождение массы звезды 3

3. Покрытие звезды Луной 16 баллов

22 декабря 2010 года произошло полное лунное затмение, во время которого произошло покрытие Луной звезды 1 Близнецов. Определите:

A. Каковы экваториальные координаты этой звезды? (Указать с точностью до $0.5°$).

B. На какой высоте кульминирует эта звезда в верхней кульминации, при наблюдении из индийского города Мадурай, географические координаты которого $\varphi = 9°$ с.ш, $\lambda = 78°$ в.д.?

C. На какой высоте в верхней кульминации в этот день в городе Мадурай кульминирует Солнце?

D. Каково было прямое восхождение Солнца 6 января 2011 года?.

Решение.

Лунное затмение произошло 22 декабря в день зимнего солнцестояния. В этот день экваториальные координаты Солнца таковы: склонение $\delta_{\odot} = -23.5^\circ$, прямое восхождение $\alpha_{\oplus} = 18$ ч.. Т.к. Солнце, Земля и Луна в этот день находятся на одной прямой, то координаты Луны: склонение $\delta_{\text{Луны}} = +23.5^\circ$, прямое восхождение $\alpha_{\text{Луны}} = 6$ ч..

Экваториальные координаты звезды такие же, т.к. происходит покрытие ее Луной во время полного лунного затмения - $\alpha = 6$ ч. и $\delta = +23.5^\circ$

Найдем высоту звезды в верхней кульминации, в городе Мадурай, учтем, что звезда наблюдается к северу от зенита.

$$h_{\uparrow} = 90^\circ + \varphi - \delta \to \delta = 90^\circ + 9^\circ - 23.5^\circ = 75.5^\circ$$

Найдем высоту Солнца в верхней кульминации, учитывая ,ч то оно находится в южном небесном полушарии, а следовательно будет кульминировать к югу от зенита:

$$h_{\odot} = 90^\circ - \varphi + \delta = 90^\circ - 9^\circ - 23.5^\circ = 57.5^\circ$$

Определим прямое восхождение Солнца на 6 января 2011 г. Вблизи точек солнцестояний, почти вся скорость перемещения Солнца по эклиптике направлена вдоль небесного экватора. Значит прямое восхождение Солнца увеличивается каждый день примерно на один градус. За пятнадцать дней оно увеличится на 15°, т.е на один час. Прямое восхождение Солнца 6 января 2011 года $\alpha_{\oplus} = 19$ ч..

Ответ. Экваториальные координаты звезды $\alpha = 6$ ч. и $\delta = +23.5^\circ$, высота звезды в верхней кульминации $h_{\uparrow} = 75.5^\circ$, высота Солнца в верхней кульминации $h_{\odot} = 57.5^\circ$, Прямое восхождение Солнца на 6 января 2011 г. составило $\alpha_{\odot} = 19$ ч..

Критерии оценивания. **16**

Найдено прямое восхождение звезды 2
Найдено склонение звезды 2
Найдена высота звезды в момент верхней кульминации 4
Найдена высота Солнца в момент верхней кульминации 4
Определено прямое восхождение Солнца на 6 января 4

4. Очень похожие минимумы 16 баллов

Двойная затменно-переменная звезда, имеет два минимума блеска за период, причём глубина минимумов одинакова. Период системы составляет 5 дней, а расстояние между компонентами постоянно и равно – 0.1 а.е., наклон орбиты составляет 90°, массы компонент равны между собой, радиус одной из компонент равен 2 радиусам Солнца. Считая, что звёзды находятся на главной последовательности, где L пропорционально $M^{3.9}$ определите глубины минимумов системы. Найдите также светимость системы.

Решение. Сначала можем по 3 закону Кеплера определить суммарную массу системы M_Σ:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\Sigma}$$

Здесь T – период системы, a – расстояние между звёздами. Отсюда:

$$M_\Sigma = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 1.07 \cdot 10^{31} \text{ кг} = 5.35 \ M_\odot$$

По условию $M_1 = M_2 = M_\Sigma/2$. Получаем, что массы звёзд равны. А значит равны и их светимости (так как светимость пропорциональна массе в степени 3.9).

$$M_1 = M_2 = M = M_\Sigma/2 = 2.68 M_\odot$$

$$L_1 = L_2 = L = M^{3.9} = 46.7 \ L_\odot$$

Отсюда сразу можем ответить на второй вопрос задачи, то есть найти суммарную светимость системы L_Σ:

$$L_\Sigma = 2 \cdot L = 93.5 \ L_\odot$$

Теперь посмотрим, что должно выполняться, чтобы глубины минимумов были одинаковыми. Один из минимумов появляется, когда первая звезда затмевается второй, а второй, когда вторая затмевает первую. Здесь важно заметить, что орбиты круговые, а звезды по условию задачи одинаковые. Найдем значение глубин минимумов.

$$E_1 = E_2 \to \Delta m_1 = \Delta m_2$$

Запишем формулу Погсона с учетом того, что в момент минимума мы видим одну звезду, так как вторая находится за наблюдаемой звездой:

$$\Delta m_1 = -2.5 \log \frac{E_1}{E_1 + E_2} = -2.5 \log(0.5) = 0.75^m$$

Это и есть ответ на первый вопрос задачи.

Ответ. Глубина минимумов системы $\Delta m = 0.75^m$, светимость системы $L_\Sigma = 93.5 L_\odot$.

Критерии оценивания. **16**

Нахождение суммарной массы системы 4
Нахождение светимости одной звезды 2
Нахождение массы одной звезды 2
Нахождение суммарной светимости системы 2
Обоснование того, что минимумы одинаковые 4
Нахождение глубины минимумов Δm 2

5. Астероиды и танцы 16 баллов

Два астероида имеют одинаковые синодические периоды - 250 дней. Определите

A. максимально возможное расстояние между ними

B. время между двумя противостояниями первого астероида относительно второго астероида

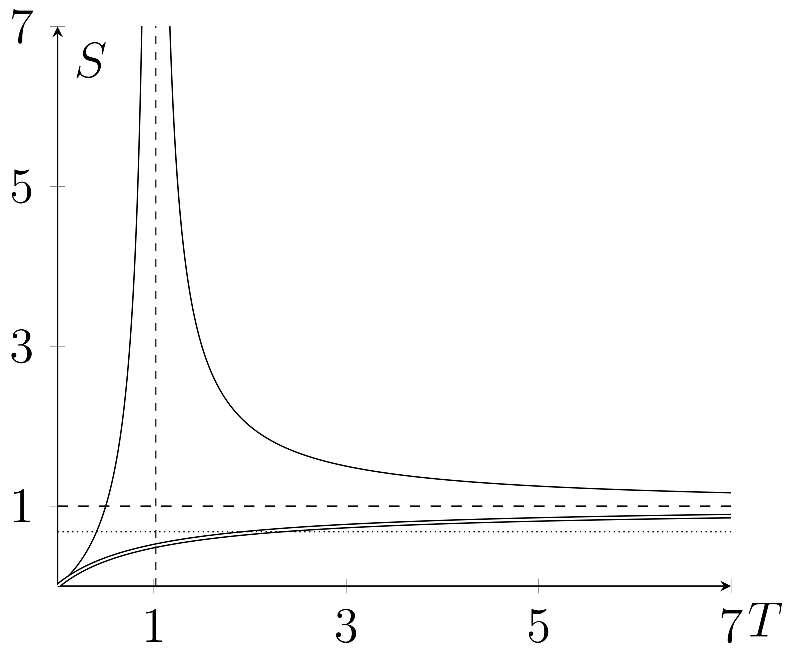
C. минимальные суточные параллаксы

Все орбиты астероидов считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Решение. Поскольку оба астероида обладают одним и тем же синодическим периодом, но при этом находятся на разных орбитах один из них будет являться внутренним, второй внешним. Определить направление вращения можно из графика зависимости синодического периода от сидерического при наблюдении с Земли (рис. 1). Для получения такого графика необходимо построить три зависимости $S = \frac{T}{1-T}$ - соответствует прямому вращению внутреннего объекта $S = \frac{T}{1+T}$ – соответствует или обратному вращению внутреннего объекта, или обратному вращению внешнего, $S = \frac{T}{T-1}$ – соответствует прямому вращению внешнего объекта. Двойная линия – соответствует обратному движению тела.

Можно заметить, что синодический период в 250 дней (0.68 года) соответствует прямому вращению внутреннего астероида и обратному вращению внешнего. Линия, состоящая из точек, соответствует синодическому периоду $S = 0.68$ года. Эта линия пересекает графики в двух точках. В одном случае – это прямое движение внутреннего объекта, во второму случае – это обратное движение внешнего объекта.

Синодический период с Земли



Определим периоды обращения обоих астероидов:

Внутренний астероид с прямым вращением:

$$\frac{1}{S_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_\oplus} \to T_1 = \frac{S_1 \cdot T_\oplus}{T_\oplus + S_1} = \frac{250 \cdot 365.25}{365.25 + 250} = 148.4 \text{ дня}$$

Внешний астероид с обратным движением:

$$\frac{1}{S_4} = \frac{1}{T_\oplus} + \frac{1}{T_4} \to T_4 = \frac{S_4 \cdot T_\oplus}{T_\oplus - S_4} = \frac{250 \cdot 365.25}{365.25 - 250} = 792.3 \text{ дня}$$

Найдем их взаимный синодический период. Он и будет периодом в между двумя противостояниями первого астероида относительно второго астероида:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_4} \to S = \frac{T_1 \cdot T_4}{T_4 + T_1} = \frac{148.4 \cdot 792.3}{792.3 + 148.4} = 125.0 \text{ дня}$$

Минимальные же суточные параллаксы будут при максимальном удалении от Земли. Найдем большие полуоси орбит астероидов:

$$a_1 = a_\oplus \left(\frac{T_1}{T_\oplus}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\left(\frac{148.4}{365.25}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.55 \text{ а.е.}$$

$$a_4 = a_\oplus \left(\frac{T_4}{T_\oplus}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\left(\frac{792.3}{365.25}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.68 \text{ а.е.}$$

Максимально возможное расстояние будет, когда астероиды будут на одной прямой с Солнцем, но по разные стороны от него:

$$\Delta = a_1 + a_4 = 0.55 + 1.68 = 2.23 \text{ а.е.}$$

Для минимального суточного параллакса необходимо, чтобы расстояние до астероида было максимальным, следовательно астероиды должны находится за Солнцем относительно Земли. Найдем суточные параллаксы:

$$\theta_1 = 206265"\frac{R_{\oplus}}{a_1 + a_{\oplus}} = 206265"\frac{6378}{(0.55+1)1.5\cdot 10^8} = 5.7''$$

$$\theta_4 = 206265"\frac{R_{\oplus}}{a_4 + a_{\oplus}} = 206265"\frac{6378}{(1.68+1)1.5\cdot 10^8} = 3.3''$$

Ответ. Максимально возможное расстояние $\Delta = 2.23$ а.е., время между взаимными противостояниями - $S = 125.0$ дня, минимальные суточные параллаксы $\theta_1 = 5.7''$ и $\theta_4 = 3.3''$

Критерии оценивания. **16**

Рассмотрены варианты прямого и обратного движения........................2
Исключены не подходящее решения........................2
Найдены периоды астероидов........................2
Найдены большие полуоси орбит........................4
Определено максимально возможное расстояние........................2
Найдены минимальные суточные параллаксы........................2
Найден взаимный синодический период........................2

6. Телескоп Гюйгенса 16 баллов

В 1665 г Христиан Гюйгенс описал кольца Сатурна. Свои наблюдения он проводил с помощью телескопа системы Кеплера, объектив которого равен 5 см, фокусное расстояние объектива 3.6 м, кратность достигала 50, а поле зрения окуляра 40°. Определите:

A. Чему равна длина телескопа?

B. Во сколько раз поле зрения телескопа больше углового размера Сатурна с кольцами в противостоянии? Диаметр колец Сатурна $D_k = 250000$ км

C. Во сколько раз больший диаметр объектива нужен, чтобы обнаружить щель Кассини? Угловой размер щели Кассини составляет в противостоянии $\theta = 0,65''$

Решение.

Телескоп Гюйгенса был собран по схеме Кеплера и его длина равна сумме фокусных расстояний объектива и окуляра. Фокусное расстояние объектива равно:

$$F = 3.6 \text{ м}$$

Фокусное расстояние окуляра составило:

$$f = \frac{F}{\Gamma} = \frac{360}{50} \approx 7.2 \text{ см}$$

Длина телескопа:

$$L = 3.6 + 0.07 = 3.67 \text{ м}$$

Поле зрения телескопа составило:

$$\theta = \frac{\alpha_{\text{Окуляра}}}{\Gamma} = \frac{40}{50} = 0.8^\circ = 2880''$$

Проверим как соотносятся поле зрения и угловой размер колец Сатурна $D_k = 250000$ км:

$$\theta_k = \frac{D_k}{a_{\text{Сатурн}} - a_\oplus} = \frac{250000}{1.2 \cdot 10^9} = 0.0002 = 43''$$

Поле зрения телескопа больше в $\frac{2880''}{43''} = 67$ раз. Теперь определим разрешающую способность телескопа:

$$\beta = 1.22 \cdot 206265'' \frac{\lambda}{D} = 1.22 \cdot 206265'' \frac{50 \text{ нм}}{50 \text{ мм}} = 2.8''$$

В такой телескоп щель Кассини с угловым размером $0.65''$ не видна. Нужен диаметр объектива более чем в 4.31 раза больший, т.е. более 215 мм.

Ответ. Длина телескопа $L = 3.6 + 0.07 = 3.67$ м, поле зрения телескопа больше в 67 раз, чтобы обнаружить щель Кассини нужен диаметр объектива более чем в 4.31 раза больший, чем 5 см.

Критерии оценивания. **16**

Найдено фокусное расстояние окуляра . . . 2

Найдена длина телескопа . . . 2

Найдено поле зрения телескопа . . . 2

Найден угловой размер Сатурна с кольцами в противостоянии . . . 2

Если не правильно взято расстояние до Сатурна . . . 1

Определено во сколько раз больше поле зрения телескопа . . . 2

Найдено угловое разрешение телескопа . . . 4

Определено во сколько раз больший телескоп нужен . . . 2

7. Спектральная линия 20 баллов

В удаленной обсерватории на одной из планет Солнечной системы астрономы проводили наблюдения некоторой спектральной линии у астероида. Вам представлены результаты этих наблюдений на графике. Определите:

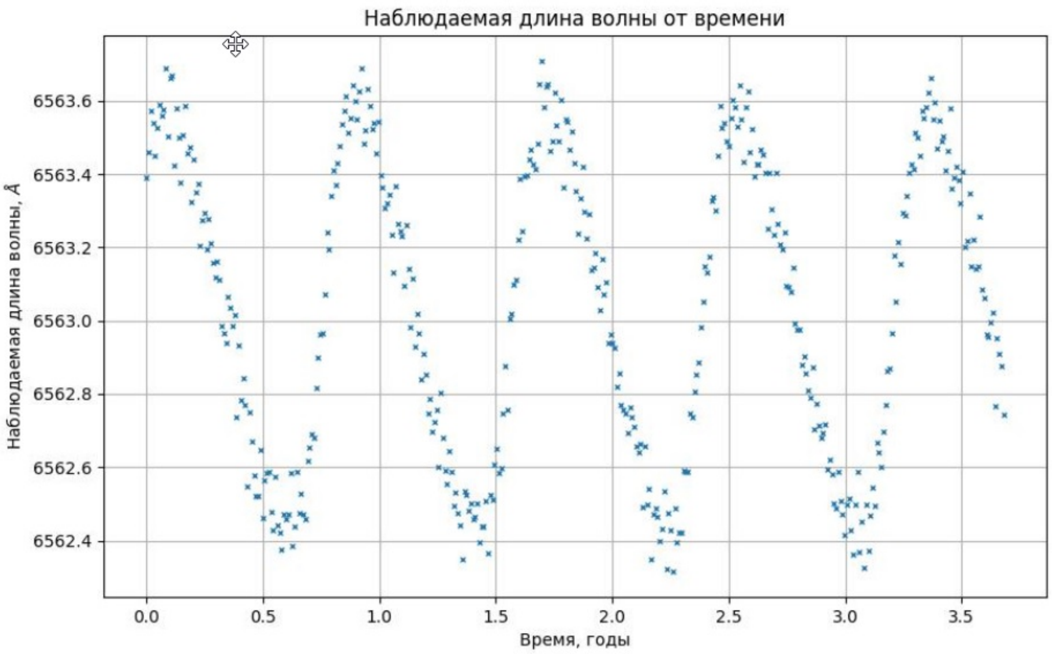
A. Чему равна лабораторная длина волны, за которой ведётся наблюдение?

B. С какой планеты (назовите её) проводились наблюдения?

C. За каким астероидом (укажите радиус его орбиты) ведётся наблюдение?

Орбиты планет и астероида считайте круговыми, лежащими в одной плоскости, при этом неизвестно, прямое обращение у астероида или обратное. Измерения и построения проводите на бланке для решений с картой или графиком, и сдайте его вместе с работой.

Рис. 1: График наблюдаемой длины волны от времени



Решение.

Заметим, что при движении по круговым орбитам максимальная и минимальная радиальные скорости равны по модулю. Значит, лабораторная длина волны может быть вычислена так:

$$\lambda = \frac{\lambda_{max} + \lambda_{min}}{2} \approx 6563\text{A}$$

Это длина волны линии H_α

На графике три синодических периода равны 2.5 годам. Значит, синодический период планеты и астероида равен:

$$T = \frac{5}{6} = 0.83\text{года}$$

Максимум модуля радиальной скорости достигается в квадратуре. По графику можно определить отношение времени, проходящего между ближайшими разноименными квадратурами к синодическому периоду. Измерим его и получим:

$$x = \frac{T_{min}}{S} = 0.41$$

Из доли периода можно найти угол с вершиной в Солнце, на сторонах которого лежат планета и астероид в момент квадратуры.

$$\alpha = 360^\circ \frac{x}{2} = 74^\circ$$

Из прямоугольного треугольника с вершинами в Солнце, планете и астероиде получим соотношение радиусов орбит астероида и планеты:

$$\frac{a_1}{a_2} = \cos(\alpha) = 0.28$$

$$\frac{T_1}{T_2} = 0.15$$

- **Прямое вращение:**

$$S = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = T_1 \frac{0.15}{1 - 0.15}$$

$$T_1 = S \frac{1 - 0.15}{0.15} = 4.7 \text{года} \rightarrow a_1 = 2.8 \text{а.е.}, a_2 = 0.79 \text{а.е.}$$

Очевидно, что $a = 2.8$ а.е. не подходит ни для одной планеты, а вот $a = 0.79$ а.е. похоже на Венеру. Следовательно, можем уточнить пару решений: $a_1 = \frac{0.72}{0.28} = 2.57$ а.е. и $a_2 = 0.72$ а.е., планета - Венера.

- **Обратное вращение:**

$$S = \frac{T_1 T_2}{T_2 + T_1} = T_1 \frac{0.15}{1 + 0.15}$$

$$T_1 = S\frac{1+0.15}{0.15} = 6.4\text{года} \rightarrow a_1 = 3.4\text{а.е.}, a_2 = 0.96\text{а.е.}$$

$a = 3.4$ а.е. не подходит ни для одной планеты, а вот $a = 0.96$ а.е. близко к Земному радиусу орбиты. Следовательно, можем уточнить пару решений: $a_1 = \frac{1}{0.28} = 3.57$ а.е. и $a_2 = 1$ а.е., планета - Земля.

Осталось понять, какая пара решений действительно подходит. Для этого по графику измерим амплитуду изменения радиальной скорости:

$$\frac{\Delta\lambda_{max}}{\lambda} = \frac{v_{rmax}}{c} \rightarrow v_{rmax} = 27\text{км/с}$$

Эта скорость меньше скорости Земли вокруг Солнца, а в паре решений с Землёй обращение у астероида обратное, поэтому максимальная радиальная скорость будет больше земной. Для пары решений с Землей максимальная радиальная скорость равна 36 км/с $>$ 27 км/с.

Делаем вывод, что обращение прямое, планета - Венера, а радиус орбиты астероида 2.57 а.е. Если посчитать, получается лучевая скорость равная 26 км/с $\sim$ 27 км/с.

Ответ. Лабораторная длина волны составляет $\lambda_0 = 6563$ Å, планета, где находится наблюдатель - Венера, большая полуось орбиты астероида $a = 2.57$ а.е.

Критерии оценивания. **20**

Найдена лабораторная длина волны 2

Верное рассмотрение решений с прямым и обратным вращением астер-да 2×4

Правильное исключение не подходящих решений с обоснованием 4

Найден период обращения астероида 2

Найдена планета наблюдений 2

Найдена радиус орбиты астероида 2