

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

11 класс

11.1. Система Сириуса

Это двойная звезда. Звезда А – звезда *главной последовательности*. Её масса $M_A = 2M_\odot$. Звезда В – *белый карлик*. Две звезды вращаются вокруг общего центра масс. Большая полуось орбиты $a = 20$ а.е. Период обращения звезд вокруг общего центра масс $T = 50$ лет. Вычислите общую массу M этой двойной звезды и массу M_B белого карлика (в единицах солнечной массы).

Гравитационная постоянная: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$,

астрономическая единица: $1 \text{ а.е.} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$,

масса Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$,

1 год $= 3,2 \cdot 10^7 \text{ с}$.

Решение

Из третьего закона Кеплера $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$, $M = M_A + M_B$. (2 балла)

определяется общая масса M двойной системы: $M = \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \cdot \frac{a}{G}$, (3 балла)

$M \approx 6 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 3M_\odot$. (2 балла)

Масса белого карлика: $M_B = M - M_A \approx M_\odot$. (1 балл)

11.2. Скопление галактик

1) Скопление галактик представляет собой гравитационно-связанную систему. Радиус скопления $R \approx 4$ Мпк. Скорость движения галактик (относительно центра масс скопления) $v \approx 1000$ км/с. Оцените массу скопления (в кг и в единицах солнечной массы).

2) Скопление галактик является источником рентгеновского излучения. Излучение испускает горячий межгалактический газ, заполняющий весь объём скопления. Газ удерживается в скоплении тяготением. Другими словами, межгалактический газ в скоплении и скопление в целом находятся в состоянии гравитационной связанности, в состоянии равновесия. Оцените температуру T межгалактического газа в скоплении.

Гравитационная постоянная: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$,

постоянная Больцмана: $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$,

масса Солнца: $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$,

масса частицы газа: $m = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

Решение

1) В приближении круговых орбит для галактик скопления

$$v^2 = \frac{GM}{R}, \Rightarrow M = \frac{R \cdot v^2}{G}, \quad (2 \text{ балла})$$

$$M \approx 2 \cdot 10^{45} \text{ кг} = 10^{15} M_\odot. \quad (2 \text{ балла})$$

2) Средняя скорость (квадратичная) теплового движения частиц газа $\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$.

В том же приближении имеем: $\frac{3kT}{m} = \frac{GM}{R}, \Rightarrow T = \frac{GMm}{3kR}$. (3 балла)

$$T \approx 4 \cdot 10^7 \text{ К} \approx 10^7 \text{ К} \quad (1 \text{ балл})$$

Но можно и так. В силу гравитационной связанности средняя скорость теплового движения

частиц газа должна быть меньше второй космической $v_{2K} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$.

Из условия $\bar{v} < v_{2k}$ для температуры газа получаем: $T < \frac{2GMm}{3kR} \approx 9 \cdot 10^7 \text{ К} \approx 10^8 \text{ К}.$

11.3. Планета Т-звезды

Планета движется вокруг своей звезды по круговой орбите радиуса r и находится в *зоне обитаемости*. Интенсивность (поток) излучения звезды $I = \frac{L}{4\pi r^2}$ на планете

такая же, как и на Земле от Солнца. Светимость звезды $L = 9 \cdot 10^{-6} L_{\odot}$, её радиус $R = 0,1 R_{\odot}$.

- 1) На каком расстоянии r от Т-звезды находится планета?
- 2) Найдите массу звезды (в единицах солнечной массы).
- 3) Оцените орбитальную скорость планеты (в км/с) и период её обращения вокруг звезды (в часах).
- 4) Оцените температуру поверхности звезды.

Соотношение "светимость-масса" для Т-звезды имеет вид $\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{5/2}.$

гравитационная постоянная: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2,$

расстояние от Земли до Солнца: $a = 150 \text{ млн км}.$

светимость Солнца: $L_{\odot} = 4 \cdot 10^{26} \text{ Вт},$

масса Солнца: $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг},$

радиус Солнца: $R_{\odot} = 7 \cdot 10^8 \text{ м}.$

Решение

- 1) Расстояние планеты от звезды находится из условия нахождения планеты в зоне обитаемости: $I = I_{\oplus} \Rightarrow \frac{L}{r^2} = \frac{L_{\odot}}{a^2} \Rightarrow r = a \sqrt{\frac{L}{L_{\odot}}} = 3 \cdot 10^{-3} \cdot a = 4,5 \cdot 10^8 \text{ м}. \quad (2 \text{ балла})$

- 2) Масса звезды: $\frac{M}{M_{\odot}} = \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{2/5} \approx 0,01 \Rightarrow M \approx 0,01 M_{\odot} \quad (1 \text{ балл})$

- 3) Скорость движения по круговой орбите:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \approx 5,4 \cdot 10^4 \text{ м/с} = 54 \text{ км/с}. \quad (1 \text{ балл})$$

Период обращения планеты: $T = \frac{2\pi r}{v}$ или $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}, T \approx 5 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 14 \text{ ч}. \quad (1 \text{ балл})$

- 4) Светимость звезды: $L = 4\pi\sigma R^2 T^4. \quad (1 \text{ балл})$

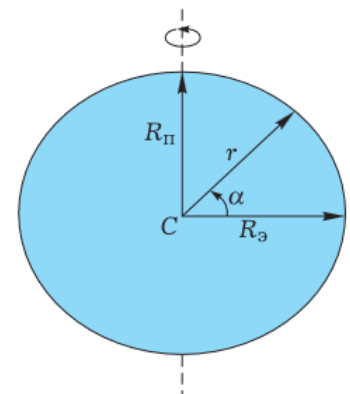
Температура поверхности: $T = \left(\frac{L}{4\pi\sigma R^2} \right)^{1/4} = 1000 \text{ К}. \quad (2 \text{ балла})$

11.4. Вращение звезды

Анализ равновесной формы вращающейся газовой конфигурации (звезды) можно провести на основе модели Роша. В рамках этой модели предполагается, что распределение массы вещества звезды не изменяется при вращении (модель твердотельного вращения). Поверхность звезды представляет собой поверхность равного потенциала гравитационных и центробежных сил:

$$\varphi = \varphi_{\text{гр}} + \varphi_{\text{цб}} = \text{const},$$

где $\varphi_{\text{гр}} = -\frac{GM}{r}$ – гравитационный потенциал,



$$\varphi_{\text{цб}} = -\frac{1}{2} \cdot \omega^2 r^2 \cos^2 \alpha - \text{потенциал поля центробежной силы инерции в данной точке}$$

r поверхности звезды, ω – угловая скорость вращения звезды вокруг своей оси (см. рис.). Звезда *Альтаир*. Масса звезды $M = 1,7M_{\odot}$. Экваториальный радиус $R_{\text{э}} = 2R_{\odot}$. Экваториальная скорость вращения $v_{\text{э}} = 286$ км/с. Найдите полярный радиус $R_{\text{п}}$ звезды (в единицах солнечного радиуса $R_{\odot}$).

Масса Солнца: $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ кг,

радиус Солнца: $R_{\odot} = 7 \cdot 10^8$ м.

Решение

Для точек, лежащих на полюсе и на экваторе, заданное уравнение для потенциалов принимает вид:

$$\frac{GM}{R_{\text{п}}} = \frac{GM}{R_{\text{э}}} + \frac{\omega^2 R_{\text{э}}^2}{2}, \quad (3 \text{ балла})$$

в этом уравнении $\omega^2 R_{\text{э}}^2 = v_{\text{э}}^2$. Полярный радиус звезды $R_{\text{п}} = \frac{R_{\text{э}}}{1 + \frac{R_{\text{э}} v_{\text{э}}^2}{2GM}}$. (3 балла)

$$R_{\text{п}} \approx 1,1 \cdot 10^9 \text{ м} = 1,6R_{\odot}. \quad (2 \text{ балла})$$

11.5. Туманность

Туманность, образовавшаяся в результате вспышки сверхновой звезды, имеет радиус $r = 6,2 \cdot 10^{17}$ м и в настоящее время расширяется со скоростью $v = 115$ км/с. Когда произошла вспышка сверхновой (время расширения до наблюдаемого радиуса)? Расширение

туманности происходит по закону $r = \left(\frac{Q}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}$, где t – время, Q – энергия вспышки,

ρ – плотность межзвездной среды.

1 год = $3,2 \cdot 10^7$ с.

Решение

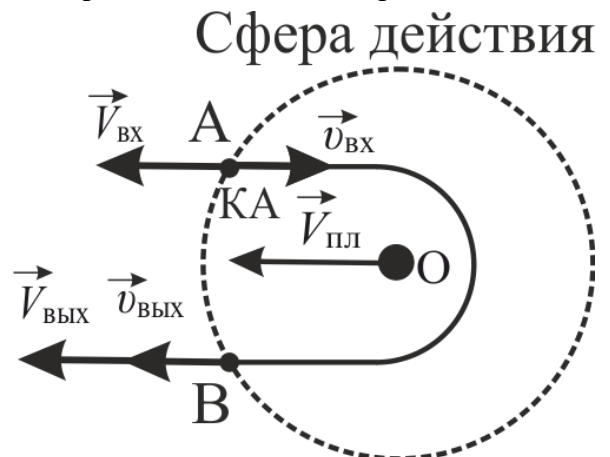
Т.к. $r = \left(\frac{Q}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}$, то скорость расширения туманности $v = \frac{dr}{dt} = \frac{2}{5} \left(\frac{Q}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}} \frac{1}{t^{\frac{3}{5}}}$. (4 балла)

Искомое время $t = \frac{2r}{5v}$, (3 балла)

$$t = 2,2 \cdot 10^{12} \text{ с} = 68750 \text{ лет} \approx 70 \text{ 000 лет}. \quad (1 \text{ балл})$$

11.6. Гравитационный удар (манёвр)

На рисунке показана простейшая модель гравитационного удара (манёвра), в результате которого космический аппарат (КА) получает дополнительную скорость, необходимую для убегания из Солнечной системы. Точка О – центр планеты, $V_{\text{пл}}$ – скорость планеты относительно Солнца. КА входит в сферу действия планеты в точке А со скоростью $V_{\text{вх}}$ относительно Солнца и выходит из сферы действия в точке В со скоростью $V_{\text{вых}}$ относительно Солнца. На рисунке $v_{\text{вх}}$ и $v_{\text{вых}}$ – скорость КА на входе и выходе из сферы действия относительно планеты. КА, запущенный с Земли, входит в сферу действия Юпитера со скоростью $V_{\text{вх}} = 6$ км/с. Скорость Юпитера $V_{\text{пл}} = 13$ км/с. С какой скоростью $V_{\text{вых}}$ КА вылетит из сферы действия Юпитера?



Решение

1) Вход в сферу действия. Теорема сложения скоростей: $\vec{V}_{\text{вх}} = \vec{V}_{\text{пл}} + \vec{v}_{\text{вх}}$. **(1 балл)**

Проецируя это уравнение на ось ОХ, направленную по вектору скорости $\vec{V}_{\text{пл}}$, находим скорость входа КА относительно планеты:

$v_{\text{вх х}} = V_{\text{вх}} - V_{\text{пл}} = -7$ км/с – проекция вектора скорости на указанное направление,

$v_{\text{вх}} = V_{\text{пл}} - V_{\text{вх}} = 7$ км/с – модуль вектора скорости. **(1 балл)**

2) Выход из сферы действия. Теорема сложения скоростей: $\vec{V}_{\text{вых}} = \vec{V}_{\text{пл}} + \vec{v}_{\text{вых}}$.

Проецируя на направление вектора $\vec{V}_{\text{пл}}$, находим скорость КА на выходе из сферы действия,

$$V_{\text{вых}} = V_{\text{пл}} + v_{\text{вых}}. \quad \textbf{(1 балл)}$$

Скорости $v_{\text{вх}}$ и $v_{\text{вых}}$ равны по модулю: $v_{\text{вых}} = v_{\text{вх}}$. **(2 балла)**

Это утверждение следует из уравнения энергии $\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \text{const}$. **(1 балл)**

Таким образом, скорость КА на выходе из сферы действия Юпитера относительно Солнца равна

$$V_{\text{вых}} = V_{\text{пл}} + v_{\text{вх}} = 2V_{\text{пл}} - V_{\text{вх}} = 20 \text{ км/с}. \quad \textbf{(2 балла)}$$