

# 11 класс

## Задача 1

Найдите радиус стационарной орбиты спутника Венеры. Сравните его с радиусом гео-стационарной орбиты и с расстоянием от Земли до Луны.

Стационарной называется орбита, лежащая в плоскости экватора планеты, на которой искусственный спутник будет висеть всё время над одной и той же точкой поверхности.

8 баллов.

## Решение

Стационарный спутник обращается вокруг планеты с периодом, равным периоду вращения самой планеты вокруг оси. Важно, что период планеты нужно брать сидерический, т.е. относящийся к инерциальной системе координат.

Период вращения Венеры есть в справочных данных:

$$T_B = 243,02 \text{ (сут)} = 2,100 \cdot 10^7 \text{ (с)}.$$

Далее можно поступить разными способами. Во-первых, можно приравнять центростремительное ускорение гравитационному:

$$\omega^2 R = \frac{GM}{R},$$

где  $M$  – масса планеты,  $\omega$  – её угловая скорость,  $G$  – гравитационная постоянная,  $R$  – искомый радиус орбиты спутника. Из этого уравнения найдем:

$$R = \sqrt[3]{GM/\omega^2}.$$

Вычисление дает:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_B} = \frac{6,283}{2,100 \cdot 10^7} = 2,99 \cdot 10^{-7} \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4,87 \cdot 10^{24}}{(2,99 \cdot 10^{-7})^2}} = 10^9 \cdot \sqrt[3]{3,63} = 1,54 \cdot 10^9 \text{ (м)} \approx 1\,540\,000 \text{ (км)}.$$

Другой, более простой вариант решения, – использовать обобщенный третий закон Кеплера и сравнить радиусы орбит спутников Земли и Венеры. Обозначив индексом 1 систему Венеры, а индексом 2 – Земли, получим:

$$\frac{M_1 T_1^2}{M_2 T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Отсюда находим

$$a_1 = a_2 \sqrt[3]{\frac{M_1 T_1^2}{M_2 T_2^2}}$$

Поскольку

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{243,02}{0,9973} = 243,68;$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{4,87 \cdot 10^{24}}{5,97 \cdot 10^{24}} = 0,816;$$

$$a_2 = 42164 \text{ (км);}$$

то

$$a_1 = 42164 \cdot \sqrt[3]{0,816 \cdot (243,68)^2} = 42164 \cdot 36,46 \approx 1\,540\,000 \text{ (км)}.$$

Из этого решения сразу вытекает первый ответ на вторую часть задачи: радиус венеро-стационарной орбиты в 36,5 раз больше геостационарной. Поделив на радиус орбиты Луны, получим 4. Т.е. стационарный спутник Венеры будет в 4 раза дальше от неё, чем Луна от Земли.

### Оценка

Знание того, что такое стационарный спутник оценивается в 2 балла. Вычисление любым способом радиуса стационарной орбиты – 4 балла. Правильное сравнение найденного радиуса со стационарной земной и с орбитой Луны – по 1 баллу.

Радиус геостационарной орбиты можно взять из справочных данных или вычислить аналогично венерианскому. Но если участник пишет известное значение 35800 км, то за это балл не начисляется, поскольку 35800 – это не радиус орбиты, а высота спутника над земной поверхностью.

## **Задача 2**

Когда (приблизительно) восходит звезда, которая месяц назад восходила около 11 часов вечера?

*4 балла*

### Решение

Интервал между двумя восходами одной и той же звезды – ровно одни звёздные сутки – 23 ч 56 м. Это на 4 минуты короче средних солнечных суток. Поэтому на следующий день

любая звезда взойдет на 4 минуты раньше дня сегодняшнего. Месяц – это примерно 30 дней. Поэтому через месяц звезда взойдет на 120 минут раньше, т.е. около 9 часов вечера.

### Оценка

1 балл за то, что участник знает, что интервал между восходами звезды – это звездные сутки. За то, что знает их продолжительность (на 4 минуты короче солнечных) – тоже 1 балл. 2 балла за применение этих знаний для получения правильного ответа.

### Задача 3

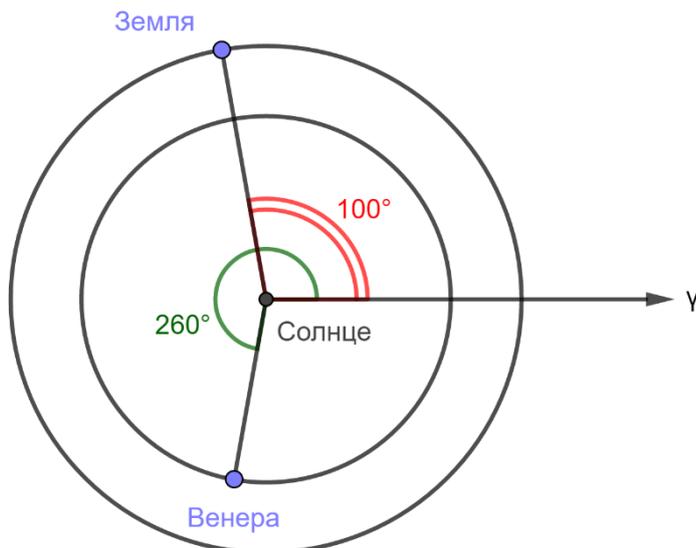
Найдите день ближайшего после 1 января нижнего соединения Венеры, если 1 января гелиоцентрическая долгота Венеры равна  $260^\circ$ , а Земли –  $100^\circ$ .

8 баллов

### Решение

Гелиоцентрическая долгота – это угол с вершиной в центре Солнца между направлением на точку весеннего равноденствия и планету. Измеряются они против часовой стрелки, если смотреть со стороны северного полюса эклиптики. На 1 января положение планет относительно Солнца показано на рисунке. Видно, что угол между Землей и Венерой составляет  $160^\circ$ . При нижнем соединении разность долгот Земли и Венеры составляет  $0^\circ$ . Таким образом, чтобы оказаться в соединении Венера должна пройти *по отношению к Земле* путь в  $200^\circ$ .

Пусть  $n_V$  и  $n_Z$  – угловые скорости Венеры и Земли соответственно. Относительная угловая скорость Венеры будет тогда  $n_V - n_Z$ , а время, необходимое для прохождения дуги  $l$  равно  $l/(n_V - n_Z)$ .



Как мы выяснили,  $l = 200^\circ$ . Угловые скорости можно найти по известным из справочных данных сидерическим периодам обращения:

$$n_3 = \frac{360}{365,256} \text{ (}^\circ\text{/сут)}; \quad n_B = \frac{360}{0,615 \cdot 365,256} \text{ (}^\circ\text{/сут)}.$$

Подставив это в нашу формулу, получим:

$$t = \frac{200}{\frac{360}{0,615 \cdot 365,256} - \frac{360}{365,256}} = \frac{365,256}{1,8} \cdot \frac{1}{\frac{1}{0,615} - 1} = 324 \text{ (сут)}.$$

Таким образом, соединение случится через 324 дня после 1 января, т.е. в 325 день года. Чтобы узнать, какой это будет месяц и какое число, можно последовательно вычитать длительность месяцев. За неимением информации о том, простой год, или високосный, положим в феврале 28 дней. Получаем:

$$325 - 31 - 28 - 31 - 30 - 31 - 30 - 31 - 31 - 30 - 31 = 21.$$

Получаем дату **21 ноября**. А если бы год был високосным, то 20 ноября.

Взаимное движение планет можно учесть и другим способом. Можно по справочным данным (или по памяти) вычислить *синодический* период Венеры (584 сут), обратная величина которого сразу дает относительную угловую скорость.

### Оценка

Описание или изображение на чертеже взаимного расположения планет оценивается в 2 балла. Определение угла, потребного для достижения верхнего соединения – 2 балла. Так же 2 балла дается за понимание того, что движутся обе планеты, поэтому угловую скорость нужно взять относительную. Наконец, еще 2 балла за вычисление ответа.

### Задача 4

У цефеиды со средним периодом  $P = 5$  суток наблюдаются синусоидальные вариации с амплитудой 43 с и периодом строго 1 сидерический год. Период цефеиды максимален около 21 декабря. Найдите (приблизительно) экваториальные координаты этой звезды.

10 баллов

### Решение

Поскольку вариации периода происходят с периодом 1 год, логично предположить, что они – следствие орбитального движения Земли вокруг Солнца. Такие вариации вызваны эффектом Доплера, формула которого

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{V}. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda$  – наблюдаемая длина волны,  $\lambda_0$  – эталонная (для неподвижного источника) длина волны,  $v$  – скорость движения источника относительно наблюдателя,  $V$  – скорость распространения волн.

Очень важно правильно интерпретировать понятие «длина волны» в данном случае! Эффект Доплера влияет на любой периодический процесс. Когда говорят о смещении линий в спектре звезды, наблюдают за электромагнитной волной, т.е. за колебаниями напряженности электрического поля (и индукции магнитного). Мы же наблюдаем за колебаниями блеска цефеиды, вызванными колебаниями её радиуса. В любом случае длина волны обратно пропорциональна частоте колебаний, а частота, в свою очередь, обратно пропорциональна периоду. Поэтому длина волны прямо пропорциональна периоду колебаний:  $\lambda \sim P$ .

Что же касается скорости распространения волны, то информацию о колебаниях мы получаем, наблюдая за излучением звезды, которое распространяется со скоростью света. Поэтому  $V = c$ .

Формулу (1) можно, поэтому, переписать в виде

$$\frac{P - P_0}{P_0} = \frac{v}{c}. \quad (2)$$

$v$  – это лучевая скорость звезды относительно Земли, равная проекции орбитальной скорости Земли на прямую Солнце–цефеида. Её максимальная величина соответствует максимальной разности  $P - P_0$ . В уравнении (2) известно всё, кроме неё. Вычислим эту скорость.

$$v = \frac{P - P_0}{P_0} \cdot c = \frac{43}{5 \cdot 86400} \cdot 300000 = 29,8 \text{ (км/с)}.$$

Максимальная лучевая скорость оказалась равной орбитальной скорости Земли! Вектор орбитальной скорости Земли всегда лежит в плоскости эклиптики. Если прямая Солнце–цефеида составляет угол  $\varphi$  с этой плоскостью, то лучевая скорость цефеиды будет равна  $v = 29,8 \cdot \cos \varphi$  (км/с), откуда  $\varphi = 0$ .

Итак, мы выяснили, что цефеида лежит в плоскости эклиптики. Где именно она там лежит? Частота колебаний минимальна, а период максимален, когда Земля удаляется от звезды с наибольшей скоростью, т.е. направление вектора скорости Земли противоположно направлению на звезду. По условию это происходит в день зимнего солнцестояния. Как легко понять, в этот момент скорость Земли направлена в точку осеннего равноденствия. А направление на звезду – противоположное, в точку весеннего равноденствия.

Итак, искомые координаты:  $\alpha \approx 0^h$ ,  $\delta \approx 0^\circ$ .

### Оценка

Анализ физической стороны задачи состоит в определении того, что изменения периода вызваны эффектом Доплера. За это дается 2 балла. Еще один балл за определение причины этого эффекта – орбитального движения Земли.

Запись формулы эффекта – 1 балл. 3 балла – за правильную интерпретацию частоты или длину волны колебаний и адаптацию формулы Доплера под период. За вычисление лучевой скорости, вывода из этого о расположении звезды в плоскости эклиптики и вычисление прямого восхождения – по 1 баллу.

### Задача 5

Известно, что для звезд поздних подклассов спектрального класса В (примерно В7-В8) абсолютная звездная величина около  $0^m$ . Звезда Вега имеет спектральный класс А0 и видимую величину  $0^m$ . Оцените расстояние до неё.

*4 балла*

### Решение

Спектральный класс А идет сразу за классом В, поэтому звезды поздних подклассов В не сильно отличаются от звезд ранних подклассов А. Вега имеет подкласс 0 – самый ранний в классе А. Поэтому за неимением других данных предположим, что её абсолютная звездная

величина не сильно отличается от  $0^m$ . В силу определения абсолютной звездной величины это означает, что расстояние до Веги около 10 пк.

На самом деле абсолютная величина Веги  $0,58^m$ , а расстояние до неё – 7,7 пк. Как видим, оценка расстояния буквально из ничего имеет погрешность меньше 25%.

### Оценка

Ключевой момент – догадаться, что спектральный класс Веги близок к поздним подклассам В (для этого нужно знать порядок классов и понятие подкласса). За это начисляется 3 балла. Определение по видимой и абсолютной величине расстояния – 1 балл. Для этого не нужно даже писать формулы, достаточно знать определение абсолютной величины.

### **Задача 6**

Оцените среднюю молярную массу вещества в недрах Солнца, имея в виду, что все атомы там полностью ионизованы.

*8 баллов*

### Решение

Молярной массой называется масса одного моля вещества. А один моль – это количество вещества, содержащего столько же частиц, сколько содержится атомов в 0,012 кг углерода  $^{12}_6\text{C}$ , т.е. число Авогадро  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  кг/моль. Молярная масса связана с относительной молекулярной массой  $M_r$  соотношением  $M = M_r \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Теперь оценим среднюю относительную молекулярную массу. В недрах Солнца основные элементы – это водород и гелий. Причем, по количеству атомов там 90% водорода, почти 10% гелия и незначительное количество более тяжелых элементов. И все атомы ионизованы. Поэтому каждый атом водорода добавит в вещество недр две частицы – протон и электрон, а каждый атом гелия три частицы – ядро ( $\alpha$ -частица) и два электрона. А масса электрона почти в 2000 раз меньше массы протона, так что ею можно и пренебречь.

Следовательно, средняя молекулярная масса частиц, «порожденных» водородом, равна

$$\overline{M}_{rH} = \frac{1 + 0}{2} = 0,5.$$

А средняя масса частиц, источником которых является гелий

$$\overline{M}_{rHe} = \frac{4 + 2 \cdot 0}{3} = 1,33.$$

Но водорода там 90%, а гелия 10%. Поэтому средняя масса всех частиц

$$\overline{M}_r = \frac{0,5 \cdot 90\% + 1,33 \cdot 10\%}{100\%} = 0,58 \approx 0,6.$$

Окончательно получим

$$M = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/моль)}.$$

### Оценка

Знание понятия «молярная масса» и его связи с относительной молекулярной массой оценивается в 1 балл. 2 балла за понимание того, как считать среднюю молекулярную массу ионизированных атомов (оторванные электроны учитываются как самостоятельные частицы с пренебрежимо малой массой). Правильное определение средних молекулярных масс водорода и гелия – по 1 баллу за каждый. 2 балла – за среднюю массу по водороду и гелию. И еще один балл за ответ в кг/моль.

Типичные ошибки в этой задаче – неучет ионизации. Участник в этом случае считает, что  $\overline{M}_{rH} = 1$  и  $\overline{M}_{rHe} = 4$ . В этом случае не начисляются вовсе баллы за вычисление молекулярных масс, и общая оценка не может быть больше 4.

Другая ошибка – соотношение водорода и гелия берется не по числу частиц, а по массе – 70/30. Здесь нулевая оценка выставляется за среднюю массу по водороду и гелию.

Прочие этапы, как и во всех задачах, оцениваются исходя их «внутренней» правильности, даже если до этого допущены ошибки, но лишь если окончательный результат не явно абсурдный.

**Общее число баллов – 42.**