1. Наблюдаем Сатурн

8 баллов

Горизонтальный параллакс Сатурна равен $1.0''$, угловой диаметр $18.9''$. Вычислите линейный диаметр планеты.

Решение.

Запишем выражение для углового размера и горизонтального параллакса:

$$\rho = 206265" \frac{R_\oplus}{\Delta} \Rightarrow \Delta = 206265" \frac{R_\oplus}{\rho}$$

Δ - расстояние от Земли до Сатурна

$$\theta = 206265" \frac{D}{\Delta}$$

$$D = \frac{\theta}{206265``} \Delta$$

$$D = \frac{\theta}{\rho} R_\oplus$$

Тогда диаметр Сатурна будет:

$$D = \frac{18.9''}{1.0''} 6378 = 120544 \approx 120500 \text{ км}$$

Ответ. Диаметр Сатурна равен $D = 120544 \approx 120500$ км

Критерии оценивания. **8**

Выражение для горизонтального параллакса 2
Выражение для углового размера 2
Вывод соотношения для диаметра 2
Верный итоговый ответ и расчет 2

2. Звезды в Галактике 8 баллов

В нашей Галактике находится 400 миллиардов звезд, подавляющее большинство из которых находятся в звездном диске. Масса звезд диска составляет $5 \cdot 10^{10} M_{\odot}$ масс Солнца, а радиус диска - 15 кпк и 300 пк в толщину. Определите:

A. среднюю плотность звездного вещества в галактическом диске в единицах системы СИ

B. среднюю плотность звездного вещества в галактическом диске в массах Солнца на кубический парсек.

C. среднюю концентрацию звезд в диске в штуках на кубический парсек.

Считать, что звезды распределены равномерно внутри диска.

Решение.

Данная задача не кажется сложной. Возможно, ее ключевая сложность – работа с внесистемными единицами измерения расстояния и массы. Определим сначала объем звездного диска. Он представляет из себя цилиндр

$$V_d = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 15000^2 \cdot 300 = 212.1 \cdot 10^9 \text{ пк}^3$$

Поскольку в задаче просят дать ответ во внесистемных единицах измерения, а также в единицах системы СИ, выразим это объем в кубических метрах.

1 парсек это расстояние, при которои одна астрономическая единица видна под углом 1". В одном парсеке находится 206265 астрономических единиц.

$$1 \text{ пк} = 206'265 \cdot 150'000'000 \text{ км} = 3.1 \cdot 10^{16} \text{ м}$$

Следовательно,объем звездного диска в метрах будет

$$V_d = 212.1 \cdot 10^9 \text{ пк}^3 = 212.1 \cdot 10^9 \cdot (3.1 \cdot 10^{16} \text{ м})^3 = 6.31 \cdot 10^{60} \text{ м}^3$$

Глядя на такие огромные цифры становится понятно, почему астрономы используют внесистемные единицы измерения.

Теперь перейдем к определению средней плотности звездного вещества, для этого всю массу разделим на весь объем. Сначала посчитаем эту величину в массах Солнца на кубический парсек.

$$\rho_1 = \frac{5 \cdot 10^{10}\ M_\odot}{212.1 \cdot 10^9\ \text{пк}^3} = \frac{50}{212.1}\ M_\odot/\text{пк}^3 = 0.24\ M_\odot/\text{пк}^3$$

Теперь сделаем все тоже самое в системе СИ.

$$\rho_2 = \frac{5 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \text{кг}}{6.31 \cdot 10^{60}\ \text{м}^3} = 1.6 \cdot 10^{-20}\ \text{кг}/\text{м}^3$$

Ответим на последний вопрос задачи. Определим среднюю концентрацию звезд в звездном диске

$$n = \frac{N}{V} = \frac{400 \cdot 10^9\ \text{штук}}{212.1 \cdot 10^9\ \text{пк}^3} = 1.89\ \text{звезд}/\text{пк}^3$$

Ответ. Средняя плотность звездного диска $\rho_1 = 0.24\ M_\odot/\text{пк}^3$, или $\rho = 1.6 \cdot 10^{-20}\ \text{кг}/\text{м}^3$, концентрация звезд $n = 1.89$ звезд/пк^3 или 1 звезда на 0.53 пк^3.

Критерии оценивания. **8**

Нахождение объема цилиндра и выражение для плотности 1
Нахождение выражения для концентрации 1
Нахождение средней плотности в системе СИ 2
Нахождение средней плотности в массах Солнца на пк^3 2
Нахождение концентрации звезд 2

3. Верхняя кульминация

16 баллов

В г.Тула $\varphi = 54^\circ$ с.ш. звезда наблюдалась в момент верхней кульминации на высоте $h = 63^\circ$.

A. Определите склонение этой звезды.

B. Каков ее астрономический азимут в момент нижней кульминации?

C. Является ли эта звезда заходящей в г.Тула?

.

Решение. Так как не сказано с какой стороны от зенита наблюдается верхняя кульминация, то необходимо рассматривать два решения - к югу и к северу от зенита. Возьмем случай к югу от зенита. Тогда:

$$\varphi > \delta_1$$

Следовательно:

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta_1 \to \delta_1 = h + \varphi - 90^\circ = 63^\circ + 54^\circ - 90^\circ = 27^\circ$$

Проверим заходит или нет звезда за горизонт в Туле. Для этого найдем значение нижней кульминации:

$$h = \varphi - 90^\circ + \delta_1 = 54^\circ - 90^\circ + 27^\circ = -9^\circ$$

Следовательно звезда заходит за горизонт. Азимут же в нижней кульминации, в нашем случае, составит 180°. Теперь рассмотрим случай верхней кульминации к северу от зенита.

$$\varphi < \delta_2$$
$$h = 90^\circ + \varphi - \delta_2 \rightarrow \delta_2 = 90^\circ + \varphi - h = 90^\circ + 54^\circ - 63^\circ = 81^\circ$$

Проверим заходит или нет звезда за горизонт в Туле. Для этого найдем значение нижней кульминации:

$$h = \varphi - 90^\circ + \delta_2 = 54^\circ - 90^\circ + 81^\circ = 45^\circ$$

Следовательно звезда не заходит за горизонт и является незаходящей. Азимут же в нижней кульминации, в нашем случае, составит 180

$^\circ$.

Ответ. Случай 1: $\varphi > \delta_1$, $\delta_1 = 31^\circ$, звезда является заходящей, Случай 2: $\varphi < \delta_2$, $\delta_2 = 81^\circ$ - звезда незаходящая, в обоих случаях нижняя кульминация звезды имеет астрономический азимут 180° .

Критерии оценивания. **16**

Случай верхней кульминации к югу от зенита 8
Найдено верно значение склонения 4
Обосновано и верно определено что звезда заходящая 2
Верно определен азимут в нижней кульминации 2
Случай верхней кульминации к северу от зенита 8
Найдено верно значение склонения 4
Обосновано и верно определено что звезда незаходящая 2
Верно определен азимут в нижней кульминации 2

4. Марсианский наблюдатель 16 баллов

В некоторый момент планеты солнечной системы расположились следующим образом для марсианского наблюдателя. Земля в западной элонгации, Меркурий в нижнем соединении, Сатурн в противостоянии, а Уран в восточной квадратуре. Для данного расположения планет определите следующие расстояния

A. от Земли до Марса

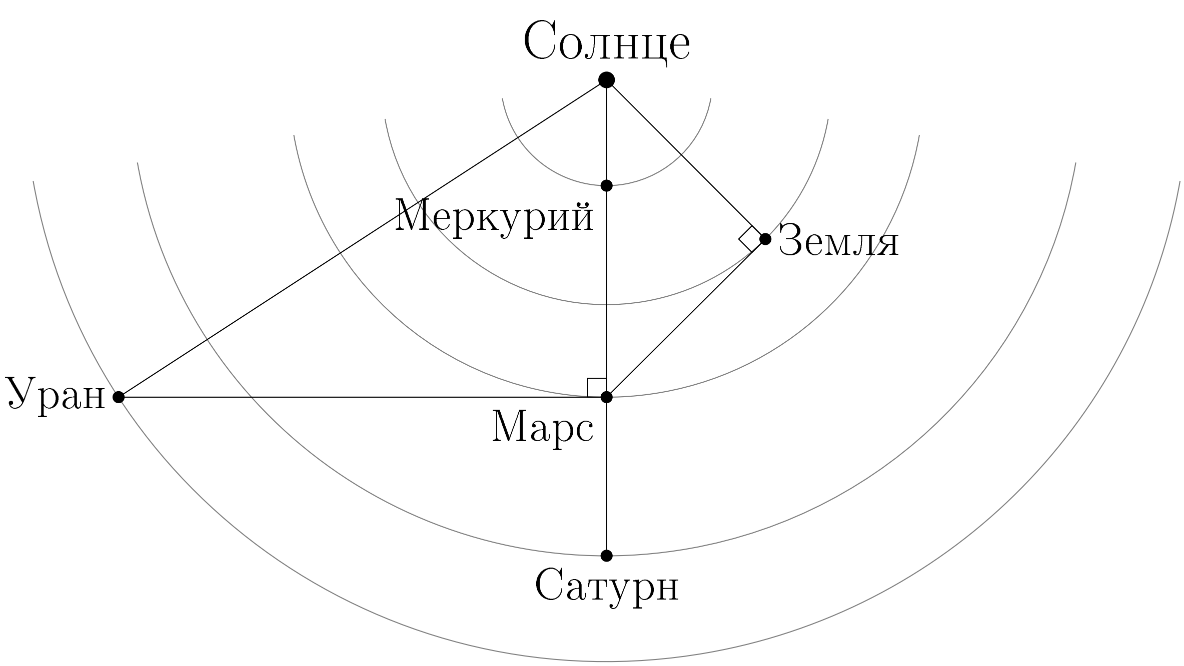
B. От Меркурия до Сатурна.

C. от Марса до Урана

D. От Сатурна до Урана

Обязательно нарисуйте рисунок с взаимным расположением всех планет.

Решение. Сначала нарисуем общую схему, на которой будут изображены орбиты и положение Меркурия, Земли, Марса (где находится наблюдатель), Сатурна и Урана. Всего 5 планет.



Теперь будем искать взаимные расстояния между планетами, которые спрашиваются в решение.

От Земли до Марса. Земля находится в западной элонгации для Марса, или Марс находится в восточной квадратуре для Земли. Здесь мы видим прямоугольный треугольник Солнце-Земля-Марс, в котором нам известна гипотенуза ($a_{♂} = 1.52$ а.е.[1]) и один из катетов ($a_{\oplus} = 1$ а.е.). Второй катет в прямоугольном треугольнике можно найти по теореме Пифагора[2].

$$R_1 = R_{\oplus♂} = \sqrt{a_{♂}^2 - a_{\oplus}^2} = \sqrt{1.52^2 - 1^2} = 1.14 \text{ а.е.}$$

Расстояние от Меркурия до Сатурна. Наверное, это самый простой пункт этой задачи. Обе планеты лежат на линии Солнце – Марс. Меркурий между Солнцем и Марсом, а Сатурн на продолжении этой линии. Следовательно обе эти планеты лежат на одной линии с Солнцем. А нам известны расстояния от Солнца до всех планет (это справочные данные). Тогда

$$R_2 = a_2 - a_1 = 9.6 \text{ а.е} - 0.38 \text{ а.е} = 9.22 \text{ а.е}$$

Расстояние между Марсом и Ураном. Уран для марсианского наблюдателя находится в восточной квадратуре, следовательно, как в первом пункте мы имеем дело с прямоугольниым треугольником Солнце - Марс - Уран. Известна гипотенуза (радиус орбиты Урана) и один из катетов (радиус орбиты Марса). Тогда

$$R_3 = \sqrt{a_3^2 - a_{♂}^2} = \sqrt{19.2^2 - 1.5^2} = 19.1 \text{ а.е}$$

Расстояние между Сатурном и Ураном. Тут мы тоже можем найти прямоугольный треугольник. Это Марс - Сатурн - Уран. Прямой угол здесь будет при вершине Марс. В предыдущем пункте мы уже определили расстояние между Марсом и Ураном. Второе расстояние в этом треугольнике (Сатурн-Марс) мы можем легко найти, аналогично пункту 2. Сатурн, Марс и Солнце находятся на одной линии. И для случая противостояния Сатурна расстояния между планетами оказывается равным $R_5 = 9.6 - 1.5 = 8.1$ а.е. Тогда снова воспользуемся теоремой Пифагора:

[1] В случае, если участник взял величину полуоси 1.5 а.е, вместо 1.52 - решение засчитывается полностью, если нет арифметических ошибок.

[2] Участники могут сделать это и через тригонометрические функции

$$R_4 = \sqrt{R_3^2 + (9.6 - 1.5)^2} = \sqrt{19.2^2 - 1.5^2 + (9.6 - 1.5)^2} = 20.8 \text{ а.е}$$

Ответ. Расстояния

A. От Земли до Марса $R_1 = 1.14$ а.е.

B. От Меркурия до Сатурна. $R_2 = 9.22$ а.е

C. От Марса до Урана - $R_3 = 19.1$ а.е

D. От Сатурна до Урана - $R_4 = 20.8$ а.е

Критерии оценивания. **16**

Наличие рисунка, на котором изображено расположение планет 4
Найдено расстояние от Земли до Марса 3
Найдено расстояние от Меркурия до Сатурна.................................... 3
Найдено расстояние от Марса до Урана.. 3
Найдено расстояние от Сатурна до Урана 3

Арифметические ошибки в расчете снижают оценку каждого пункта на 1 балл. Ошибка в формуле или в месте положения объекта обнуляет данный пункт полностью. Правильное решение этой задачи в случае наблюдателя на Земле оценивается в 0+0+1+1+1 балл

5. Шаровое скопление 16 баллов

Определите количество звезд в шаровом звездном скоплении, если известно, что диаметр скопления составляет $D = 40$ пк, а скорость убегания звезд из него, на его краю, составляет 8 км/с. Считать, что все звезды в шаровом скопление распределены равномерно и имеют одинаковую массу $M = 0.7M_\odot$ массы Солнца. Какова масса всего скопления в массах Солнца.

Решение.

Скорость убегания на краю скопления является второй космической скоростью для него. Так же обратим внимание, что радиус скопления $R = 20$пк. Следовательно полная масса скопления будет:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2GM_{\text{Скопления}}}{R_{\text{Скопления}}}}$$

$$M_{\text{Скопления}} = \frac{V_2^2 R_{\text{Скопления}}}{2G} = \frac{8000^2 \cdot 20 \cdot 206265 \cdot 1.5 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11}} = 2.97 \cdot 10^{35}\ \text{кг} = 1.48 \cdot 10^5 M$$

Определим число звезд в скоплении, разделив общую массу скопления на массу отдельной звезды:

$$N = \frac{M_{\text{Скопления}}}{0.7M_\odot} = \frac{2.97 \cdot 10^{35}}{0.7 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}} = 213102 \approx 213000$$

Ответ. Количество звезд в шаровом звездном скоплении с массой $M = 0.7M_\odot$ составляет $N = 213102 \approx 213000$ Масса скопления составляет $M_{\text{Скопления}} = 1.48 \cdot 10^5 M_\odot$

Критерии оценивания. 16

Понимание, что скорость убегания это вторая космическая скорость 2
Выражение для второй космической скорости 3
Учет того, что масса всех звезд и есть масса скопления 2
Вывод выраж-я для массы скопления через скорость убегания 3
Подсчет массы всего скопления 3
Подсчет числа звезд в скоплении 3

6. LISA

16 баллов

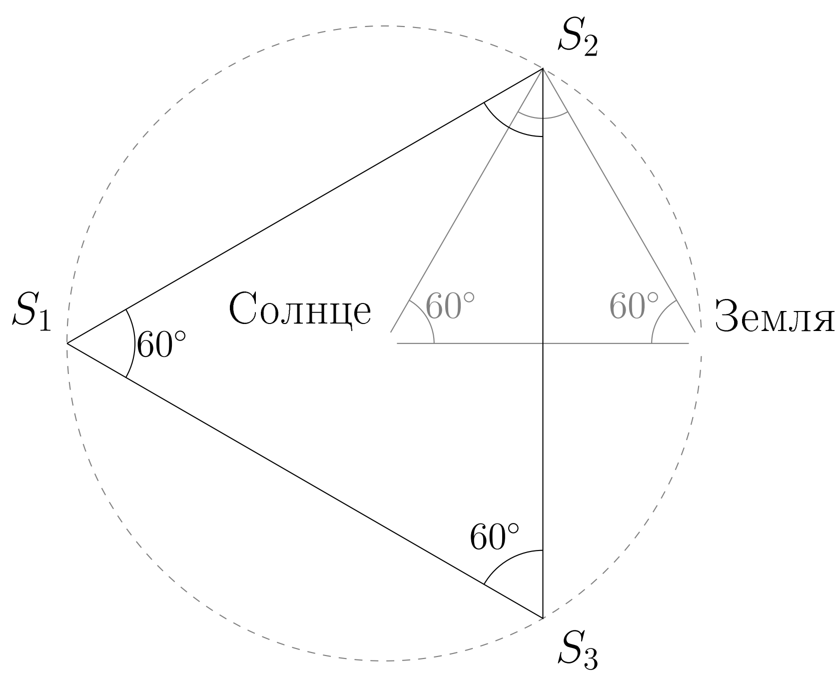
Спутники проекта LISA (3 штуки) планируют запустить на орбиту Земли вокруг Солнца таким образом, чтобы они всегда составляли равносторонний треугольник. При этом один из спутников будет всегда противоположен Земле, то есть окажется по другую сторону от Солнца.

A. Нарисуйте схему взаимного расположения спутников, Солнца и Земли.

B. Определите, какое время идет электромагнитный сигнал между спутниками и от каждого спутника до Земли?

Считайте, что все объекты двигаются в одной плоскости по круговым орбитам.

Решение. Схема положения спутников выглядит следующим образом:



Рассмотрим на рисунке получившиеся треугольники $S_1S_2S_3$ и треугольник S_2СЗ. Отрезки S_1S_2 и СЗ перпендикулярны друг другу. Расстояние от Земли до Солнца $a_\oplus = 1.5 \cdot 10^8$ км. Свет проходит это расстояние за:

$$t_0 = \frac{a_\oplus}{c} = \frac{1.5 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} = 500 \text{ сек}$$

следовательно, расстояния до спутников исходя из рисунка до Земли составят:

A. $S_1 - \text{З} = 2\text{С} - \text{З} = 2$ а.е. следовательно сигнал будет идти до Земли $t_1 = 1000$ сек $= 16$ мин40 сек

B. $S_2 - \text{З} = S_3 - \text{З} = \text{С} - \text{З} = 1$ а.е. следовательно сигнал будет идти до Земли $t_2 = t_3 = 500$ сек $= 8$ мин20 сек

Теперь найдем время прохождения сигнала между спутниками. Поскольку треугольник $S_1S_2S_3$ равносторонний, то расстояние S_2С, есть гипотенуза прямоугольного треугольника S_2СЗ, второй катет которого есть половина расстояния С – З. Следовательно:

$$S_1S_2 = 2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{3}a = \sqrt{3} \cdot \text{СЗ} = \sqrt{3} = 1.73 \text{ а.е.}$$

Найдем время прохождения сигнала:

$$\tau = S_1S_2 \cdot 500 = 866 \text{ сек}$$

Ответ. Время прохождение сигнала до Земли: для спутника S_1 составит $t_1 = 1000$ сек $= 16$ мин40 сек, для спутников S_1 и S_2 составит $t_2 = t_3 = 500$ сек $= 8$ мин20 сек, время прохождение сигнала между спутниками $\tau = 866$ сек

Критерии оценивания. 16

Построение правильного рисунка положения спутников 4
Нахождение расстояний от Земли до спутника S_1 за Солнцем 2
Нахождение времени для S_1 за Солнцем 1
Нахождение расстояний от Земли до спутника S_2 . . . . . .
опережающего на орбите Земли 2
Нахождение времени для S_2 опережающего на орбите Земли 1
Нахождение расстояний от Земли до спутника S_3 . . . . . .
отстающего на орбите Земли 2
Нахождение времени для S_3 отстающего на орбите Земли 1
Нахождение расстояний между спутниками 2
Нахождение времени прохождения сигнала между спутниками 1

7. Внутренняя и внешняя планеты 20 баллов

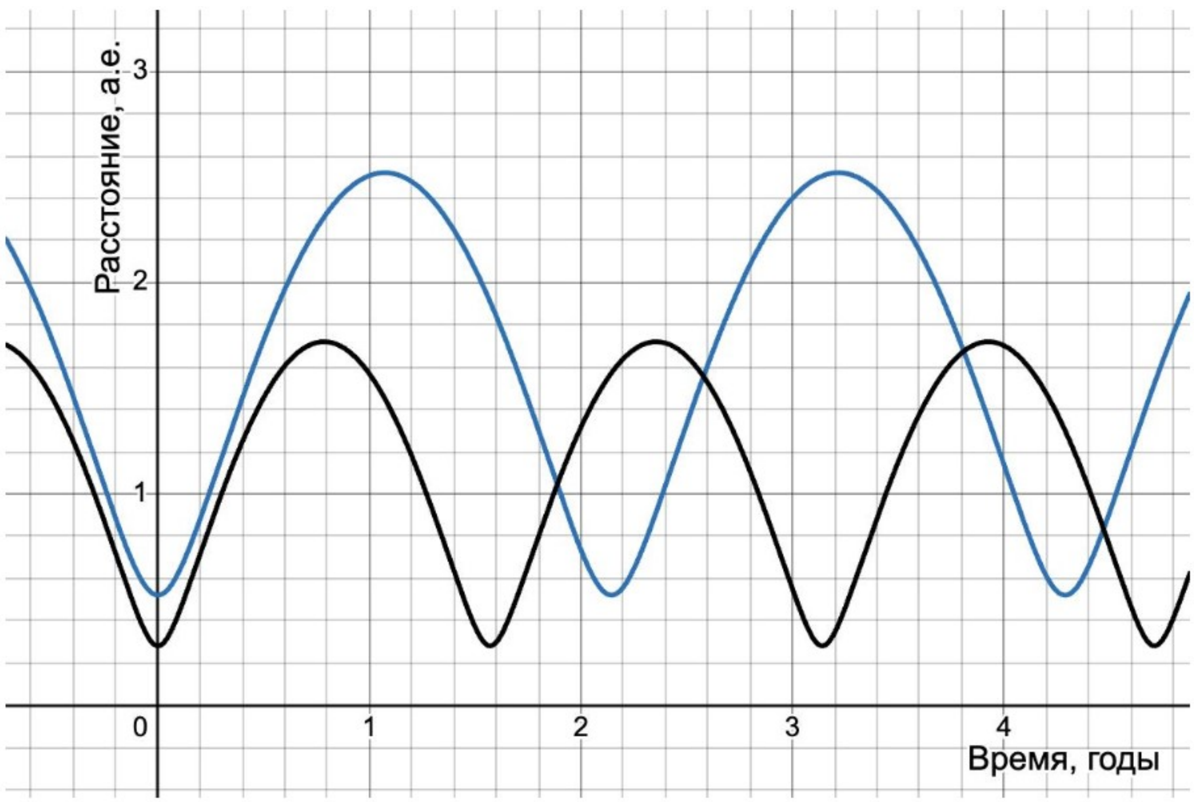
Астрономы провели измерения расстояния между двумя планетами и Землей. Для внутренней и внешней планеты по отдельности были построены графики зависимости расстояния от Земли до планеты от времени.

A. Найдите минимальное и максимальное расстояние от Земли для каждого тела. Сделайте это двумя независимыми способами.

B. Определите, что это за тела Солнечной системы.

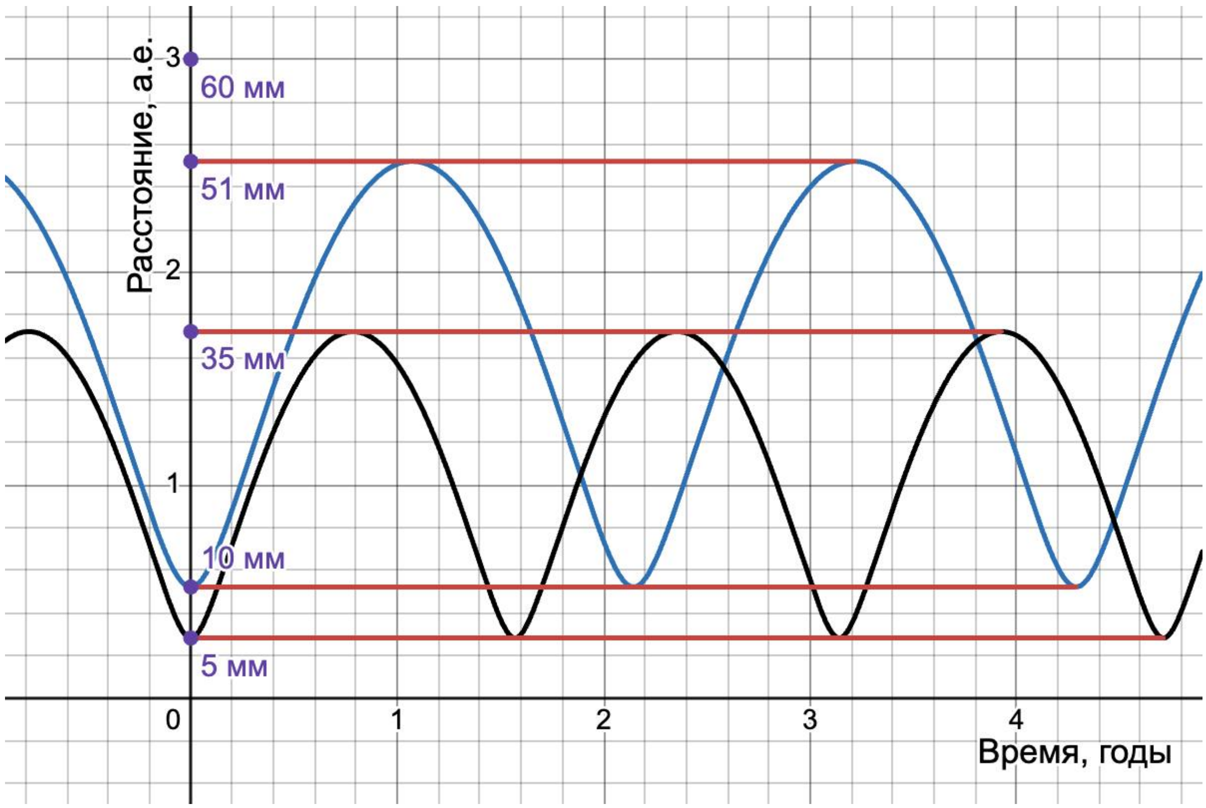
Орбиты всех тел круговые и находятся в одной плоскости. Измерения и построения проводите на бланке для решений с картой или графиком, и сдайте его вместе с работой.

Рис. 1: График расстояний между планетами и Землей



Решение. На графике представлено расстояние от планеты до Земли. Снимем расстояния и определим их в моменты наибольшего и наименьшего значений. Для этого проведем через все максимумы и минимумы отрезки до ос расстояний. и измерим масштаб, и расстояния на графике. Масштаб A удобнее всего определить из самого дальнего маркированного расстояния по оси от начала координат.

Рис. 2: Снятие точек с графика



Точность будет наиболее высокой.

$$A = \frac{60}{3} = 20\ \frac{\text{мм}}{\text{а.е.}}$$

Определим значения минимальных и максимальных расстояний

Расстояние	Меньший график	Больший график
Макс. расстояние в мм	35 мм	51 мм
Макс. расстояние в а.е	$\frac{35}{20} = 1.75$ а.е	$\frac{10}{20} = 2.55$ а.е
Мин. расстояние в мм	5 мм	10 мм
Мин. расстояние в а.е	$\frac{5}{20} = 0.25$ а.е	$\frac{10}{20} = 0.5$ а.е

На графике представлено расстояние от планеты до Земли. Здесь есть значения расстояний и есть время. Следовательно можно найти напрямую расстояния - **первый способ**, либо найти период и после, через третий закон Кеплера расстояние от Солнца. Это будет **второй способ.**. Первый способ - через измерения расстояний на графике. Снимем расстояния и определим их в моменты наибольшего и наименьшего значений. Для большего графика они составят:

$$\Delta_{1min} = 0.52 \text{ а.е.}$$
$$\Delta_{1max} = 2.52 \text{ а.е.}$$

Так как максимальное расстояние больше 2 а.е. следовательно планета внешняя. Причем ее вращение прямое, так как вид графиков повторяется с периодом более года.

$$\Delta_{1min} = a_{\text{Планеты}} - a_{\oplus} = 0.52 \text{ а.е.}$$
$$\Delta_{1max} = a_{\text{Планеты}} + a_{\oplus} = 2.52 \text{ а.е.}.$$

$$a_{\text{Планеты}} = \frac{\Delta_{1max} + \Delta_{1min}}{2} = \frac{2.52 + 0.52}{2} = 1.52 \text{ а.е.}$$

Значит радиус орбиты планеты составил $a_{\text{Планеты}} = 1.52$ а.е. - эта планета Марс.

Для меньшего графика они составят:

$$\Delta_{2min} = 0.28 \text{ а.е.}.$$
$$\Delta_{2max} = 1.72 \text{ а.е.}$$

Так как максимальное расстояние меньше 2 а.е. следовательно планета внутренняя. Причем ее вращение прямое, так как вид графиков повторяется с периодом более года.

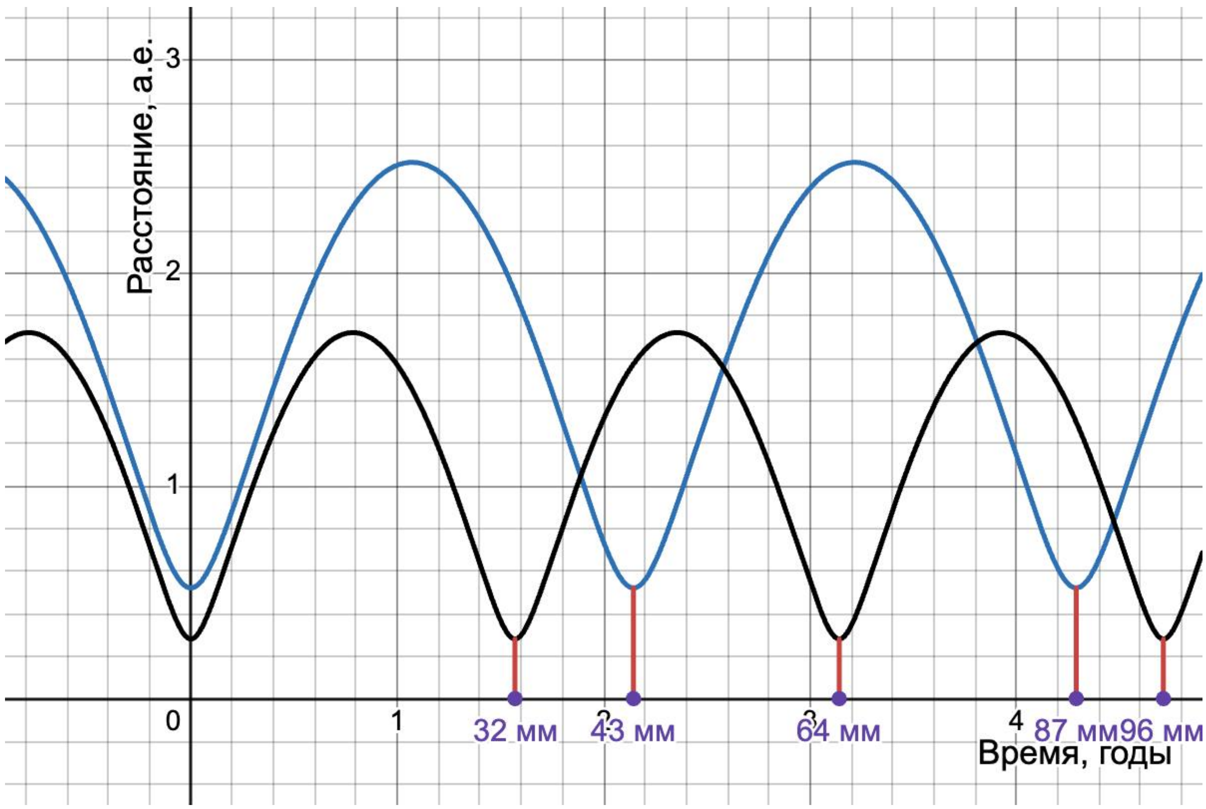
$$\Delta_{2min} = a_{\oplus} - a_{\text{Планеты}} = 0.28 \text{ а.е.}$$
$$\Delta_{2max} = a_{\text{Планеты}} + a_{\oplus} = 1.72 \text{ а.е.}.$$

$$a_{\text{Планеты}} = \frac{\Delta_{2max} - \Delta_{2min}}{2} = \frac{1.72 - 0.28}{2} \approx 0.72 \text{ а.е.}$$

Значит радиус орбиты планеты составил $a_{\text{Планеты}} = 0.72$ а.е. - это планета Венера.

Определим расстояние **вторым способом** - через периоды. Проведем измерения положений минимумов на графиках. Чтобы это посчитать необходимо опустить перпендикуляры от минимумов расстояний на ось времени. Затем измерить сколько мм будет занимать 1 год и точки до которых опущены перпендикуляры. В нашем случае 1 год составил ровно 20 мм:

Рис. 3: график расстояний между планетами и Землей



	Внутренняя планета	Внешняя планета
1	32 мм	43 мм
2	64 мм	87 мм
3	96 мм	—-
Средний период	32 мм	43.5

Масштаб B по оси времени удобнее всего определить из самого дальнего маркированного расстояния по оси от начала координат.

$$B = \frac{80}{4} = 20\ \frac{\text{мм}}{\text{год}}$$

Для первой планеты, с меньшими колебаниями расстояний. Они меньше диаметра Земной орбиты, следовательно, планета внутренняя. Период составит:

$$S_1 = \frac{32}{20} = 1.6 \text{ года}$$

Для первой планеты, с наибольшими колебаниями колебаниями расстояний. Они больше диаметра Земной орбиты, следовательно, планета внутренняя. Период составит::

$$S_2 = \frac{43.5}{20} = 2.17 \text{ года}$$

Теперь же найдем истинный период обращения, так как взаимные расстояния изменяются с синодическим периодом. Найдем сидерические периоды обращения:

$$\frac{1}{S_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_\oplus} \to T_1 = \frac{S_1 T_\oplus}{T_\oplus + S_1} = \frac{1.6 \cdot 1}{1 + 1.6} = 0.62 \text{ года}$$

Вторая планета:

$$\frac{1}{S_2} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_2} \to T_2 = \frac{S_2 T_\oplus}{S_2 - T_\oplus} = \frac{2.17 \cdot 1}{2.17 - 1} = 1.85 \text{ года}$$

Заглянув в справочные данные, мы найдем, что это планета Марс. Теперь чтобы найти минимальные расстояние найдем через третий закон Кеплера большие полуоси орбит:

$$a_1 = a_\oplus \left(\frac{T_1}{T_\oplus}\right)^{\frac{2}{3}} \to a_1 = 1 \cdot \left(\frac{0.62}{1}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.73 \text{ а.е.}$$

Заглянув в справочные данные, мы найдем, что это планета Венера.

$$a_2 = a_\oplus \left(\frac{T_2}{T_\oplus}\right)^{\frac{2}{3}} \to a_2 = 1 \cdot \left(\frac{1.85}{1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.51 \text{ а.е.}$$

Найдем минимальные и максимальные расстояния:

$$\Delta_{1min} = a_\oplus - a_1 = 1 - 0.73 = 0.27 \text{ а.е.}$$

$$\Delta_{1max} = a_1 + a_\oplus = 1 + 0.73 = 1.73 \text{ а.е..}$$

$$\Delta_{2min} = a_2 - a_\oplus = 1.51 - 1 = 0.51 \text{ а.е.}$$

$$\Delta_{2max} = a_2 + a_\oplus = 1.51 + 1 = 2.51 \text{ а.е..}$$

Ответ. А. Внутренняя планет $\Delta_{2min} = 0.28$ а.е.., $\Delta_{2max} = 1.72$ а.е. и внешняя - $\Delta_{1min} = 0.52$ а.е.., $\Delta_{1max} = 2.52$ а.е. В. Внутренняя планета - Венера, внешняя - Марс.

Критерии оценивания. **20**

Анализ графика по оси расстояний 10
Правильно указаны внешняя и внутренние планеты 2
Сняты точки, найдены расстояния в а.е. 2
Найдены радиусы орбит и минимальные и максимальные расстояния 2
Сделан и обоснован вывод, ...
это внутренняя планета имеет прямое вращение 2
Определены большие полуоси планет 2
Анализ графика по оси времени 8
Сняты точки, найдены периоды 2
Правильно указаны внешняя и внутренние планеты 2
Синодический периоды переведены в сидерические 2
Найдены радиусы орбит и минимальные и максимальные расстояния 2
Правильно определены планеты 2