
**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО АСТРОНОМИИ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ГОРОДСКОЙ ОКРУГ ГОРОД РЯЗАНЬ
2025/2026 УЧЕБНЫЙ ГОД**

11 класс

Задание 11.1. Маленький Принц и планета Фонарщика. Маленький Принц, герой одноимённой философской сказки Антуана де Сент-Экзюпери, жил на микроскопической планете-астероиде диаметра порядка нескольких метров. Он путешествовал на другие подобные планеты, лишь слегка отталкиваясь от своей планеты ногами. Однажды Принц решил полететь на далёкую планету и собрал все свои вещи. С какой минимальной скоростью он должен оторваться от своей планеты, чтобы преодолеть гравитационное взаимодействие с ней? Считайте, что планета – однородный шар радиуса $R = 1,5$ м массы $M = 4$ т; масса Принца с багажом $m = 500$ кг; Принц и багаж – материальная точка, стартующая с поверхности планеты. Гравитационная постоянная во Вселенной Маленького принца такая же, как и вблизи Земли.

Затем Принц попал на планету, которая была так мала, что на ней могли поместиться только фонарь и Фонарщик, который постоянно этот самый фонарь то зажигал, то гасил, ведь день длился там всего одну минуту. Оценить плотность этой планеты, считая ее однородным по плотности шаром. Существуют ли подобные планеты в Солнечной системе?

Возможное решение. Для отрыва от своей планеты Принц должен развить вторую космическую скорость, т.е. его кинетическая энергия должна быть не менее потенциальной энергии гравитационного взаимодействия с планетой (с учетом собственной массы Принца с грузом). Рассмотрим случай равенства.

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = |E_{\Pi}| = \frac{Gm(M+m)}{R}.$$

Отсюда

$$v^2 = \frac{2G(M+m)}{R}, \quad v = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{R}}.$$

Вычислим скорость:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} (4000 + 500)}{1,5}} \approx 6,33 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 0,633 \text{ мм/с}.$$

Для планеты Фонарщика скорость точек на поверхности планеты не должна превысить первую космическую скорость, иначе планета разрушится.

Формула для первой космической скорости имеет вид:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_1}{R_1}}.$$

Масса планеты связана с ее плотностью и объемом; объем планеты в форме шара связан с ее радиусом:

$$M_1 = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_1^3.$$

Подставляя в формулу для первой космической скорости, получим:

$$v_1 = \sqrt{\frac{G\rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_1^3}{R_1}} = R_1 \cdot \sqrt{\frac{4}{3} \pi G\rho}.$$

С другой стороны, скорость можно определить через период вращения, он известен из условий задачи и равен 1 минуте (60 с):

$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T}.$$

Приравнявая, получаем:

$$R_1 \cdot \sqrt{\frac{4}{3} \pi G\rho} = \frac{2\pi R_1}{T}, \quad \sqrt{\frac{4}{3} \pi G\rho} = \frac{2\pi}{T}.$$

Избавимся от квадратного корня, возведя обе части равенства в квадрат.

$$\frac{4}{3} \pi G\rho = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Выражаем плотность планеты:

$$\rho = \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}{\frac{4}{3}\pi G} = \frac{4\pi^2 \cdot 3}{4\pi G T^2} = \frac{3\pi}{G T^2}.$$

Вычислим плотность:

$$\rho = \frac{3\pi}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 60^2} \approx 3,9 \cdot 10^7 \text{ кг/м}^3 = 39000 \text{ г/см}^3.$$

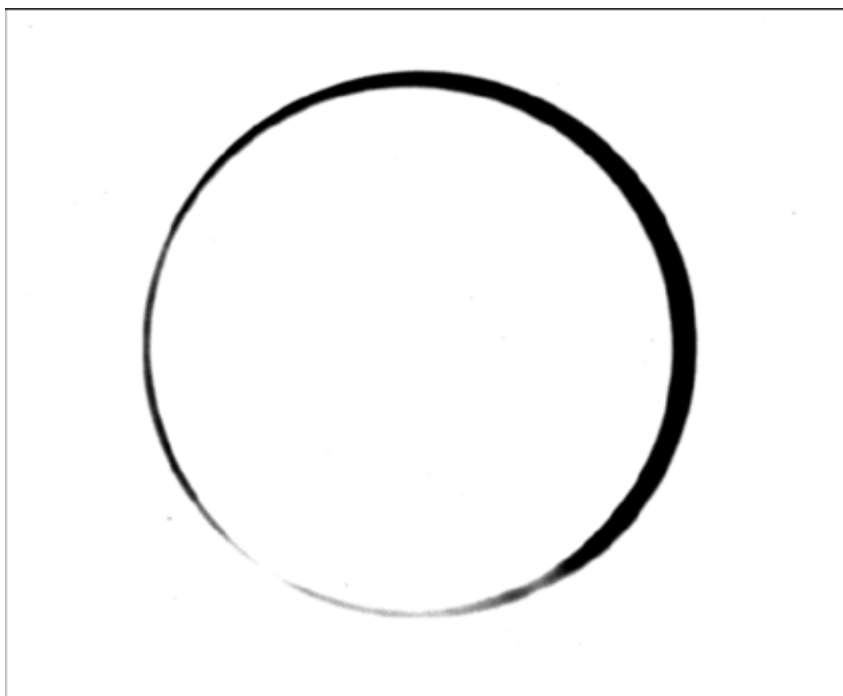
Это очень высокая плотность, на много порядков превышающая плотности планет Солнечной системы, таких планет в ней нет.

Ответ: скорость Принца должна быть выше 0,6 мм/с; плотность планеты Фонарщика $3,9 \cdot 10^7 \text{ кг/м}^3$, нет таких планет в Солнечной системе.

Критерии оценивания	Баллы
Записана или выведена формула для второй космической скорости	1
Вычислена скорость Принца с багажом	1
Определено, что планета Фонарщика существует, если точки поверхности планеты имеют скорость не больше первой космической скорости	1
Записаны уравнения для скоростей точек поверхности планеты и первой космической скорости	1+1
Получена формула для плотности планеты в зависимости от периода ее вращения и вычислена плотность	1+1
Указано, что таких планет в Солнечной системе нет	1
Итого за задачу	8

Примечание. Участник может получить незначительно отличающиеся результаты из-за другого подхода к округлению величин. Близкие к представленным результаты оцениваются полным баллом. Альтернативное решение при близком окончательном результате оценивается полным баллом.

Задание 11.2. Находка в архиве. Любитель астрономии в архиве нашел негатив снимка кольцевого затмения на 35 мм пленке. В подписи к снимку значилось, что изображение получено в Северной Суматре 22 августа 1998 года с помощью телескопа, имеющего эффективный диаметр 10 см и $f=15$. С помощью точных измерений удалось установить, что диаметр солнечного диска на оригинальном снимке на пленке равен 13,817 мм, а диаметр лунного диска равен 13,235 мм. Оцените расстояния от Земли до Солнца и Луны и процентную долю солнечного диска, покрытого Луной во время кольцевого затмения.



Возможное решение. Диаметр объектива $D = 10$ см, относительное отверстие $f = F/D = 15$, тогда фокусное расстояние объектива $F = 150$ см.

Масштаб изображения в фокальной плоскости телескопа:

$$S = (206265/F) ("/\text{мм}) = (206265/1500) "/\text{мм} = 137,51 "/\text{мм}.$$

$$\begin{aligned} \text{Угловой диаметр Солнца} &= 137,51 "/\text{мм} \times 13,817 \text{ мм} = 1899,97567 " = \\ &0^\circ.527771019 = 0^\circ 31' 39''.98 \end{aligned}$$

Расстояние до Солнца = $1392000 / ((0^\circ.527771019 / 180^\circ) \times \pi)$
= 15111845,9 км.

Угловой диаметр Луны = $137,51 \text{ ''/мм} \times 13,235 \text{ мм} = 1819,94485 \text{ ''} =$
 $0^\circ.505540236 = 0^\circ 30' 19''.94$

Расстояние до Луны = $3476 / (0^\circ.505540236 / 180^\circ \times \pi) = 393955,0515 \text{ км.}$

Процентная доля солнечного диска, покрытого Луной, составляет
 $(13,235 \text{ мм} / 13,817 \text{ мм})^2 \times 100\% = 91,75 \text{ \%}.$

Ответ: расстояние до Солнца 15111845,9 км; расстояние до Луны
393955,0515 км, процент солнечного диска, покрытого Луной, 91,75 %.

Критерии оценивания	Баллы
Получено фокусное расстояние объектива	1
Определен масштаб изображения в фокальной плоскости телескопа	2
Определены угловые размеры Солнца и Луны	1+1
Определены расстояния до Солнца и Луны	1+1
Определен процент покрытия	1
Итого за задачу	8

Задание 11.3. Невидимый объект. Спектральные исследования показывают, что звезда HD 12345 испытывает периодические (с периодом 100 дней) доплеровские сдвиги спектра. По сдвигу определили амплитуду радиальной скорости 50 м/с. Предполагается, что причиной таких колебаний является присутствие невидимого объекта – экзопланеты. Масса родительской звезды известна и составляет $1.2M_{\odot}$. Определите массу объекта, предполагая, что она гораздо меньше массы центральной звезды, а обращающаяся пара подчиняется законам Кеплера. С какой планетой Солнечной системы сравним по массе объект?

Возможное решение.

Амплитуда радиальной скорости связана с отношением масс центрального тела и объекта и орбитальной скоростью:

$$v_r = \frac{M}{M+M_*} \cdot v_o.$$

Т.к. масса объекта гораздо меньше массы звезды, то в знаменателе дроби ей можно пренебречь.

$$v_r = \frac{M}{M_*} \cdot v_o.$$

Орбитальная скорость и большая полуось орбиты объекта связаны:

$$v_o = \omega a = \frac{2\pi a}{T}.$$

Большая полуось орбиты выражается также через третий закон Кеплера:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+M_*)} \cdot a^3.$$

Пренебрежем массой объекта и выразим большую полуось орбиты:

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM_*T^2}{4\pi^2}}.$$

Вычислим:

$$a = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,2 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \cdot (100 \cdot 24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} \approx 6,7 \cdot 10^{10} \text{ м} \approx 0,448 \text{ а.е.}$$

Вычислим орбитальную скорость:

$$v_o = \frac{2\pi \cdot 6,7 \cdot 10^{10}}{100 \cdot 24 \cdot 3600} \approx 48,7 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Определим массу объекта:

$$M = \frac{v_r}{v_o} \cdot M_* = \frac{50}{48,7 \cdot 10^3} \cdot 1,2 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \approx 2,45 \cdot 10^{27} \text{ кг.}$$

Действительно, масса объекта существенно меньше массы звезды, наше исходное предположение верно.

По массе объект сравним с Юпитером:

$$M = \frac{2,45 \cdot 10^{27}}{1,899 \cdot 10^{27}} \approx 1,29 M_{Ю}.$$

Ответ: масса объекта $2,45 \cdot 10^{27}$ кг, объект сравним с Юпитером.

Критерии оценивания	Баллы
Использованы справочные данные (массы Солнца, Юпитера и пр.)	1
Записан закон Кеплера	2
Указано, что используем приближение малой массы объекта	1
Вычислена большая полуось орбиты	2
Вычислена масса объекта, объект сопоставлен с Юпитером	1+1
Итого за задачу	8

Задание 11.4. Двойная аналемма. На обработанной фотографии представлена лунная аналемма, снятая по тому же принципу, что и солнечная.

Найдите широту места съемки.

Через какие интервалы сделаны снимки?

Чем может объясняться удвоение аналеммы на снимке?



При необходимости выполните построение на увеличенном снимке в бланке ответов.

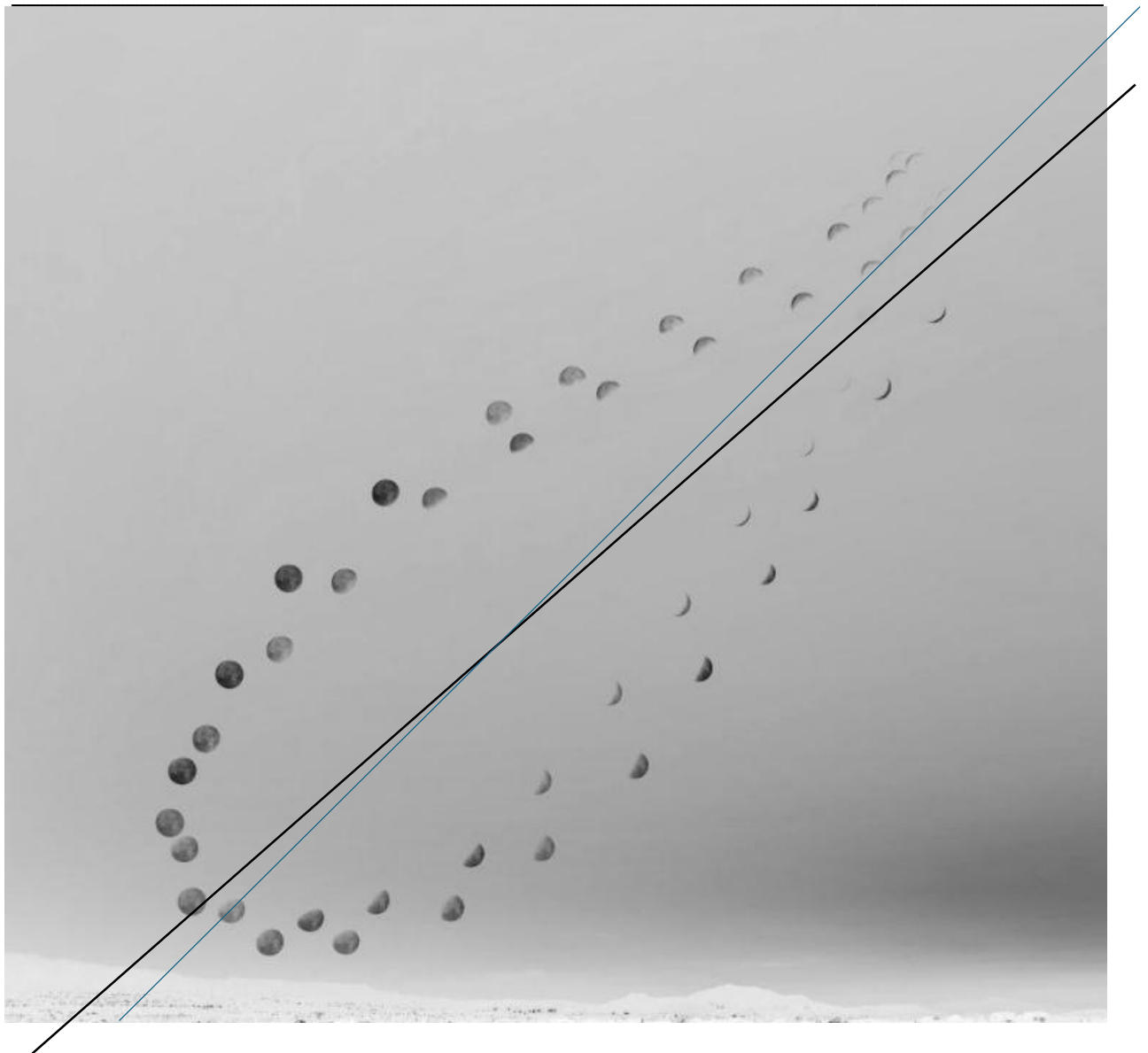
Возможное решение.

На представленном снимке хорошо видно две нижние петли лунной аналеммы, которая так же, как и солнечная, должна иметь форму восьмерки из-за наклона орбиты Луны к экватору, а также ее эксцентриситета.

Ограничимся одной из аналемм (нижней).

Для анализа проведем ось аналеммы – линию, делящую петлю пополам. Для лунной аналеммы, как и солнечной, ось перпендикулярна экватору. Следовательно, ось аналеммы должна пересекать горизонт под углом, примерно равным широте.

Угол с горизонтом может быть определен как измерением с помощью транспортира, так и из геометрических соображений (как арктангенс, например). В последнем случае: $\arctg(13,25/15) \approx 41,45^\circ$. (Исходное изображение астрофотографа Betul Turksoy двойной лунной аналеммы в небе над Турцией соответствует примерно широте 39° – 40°). Участник должен получить близкие значения широты.



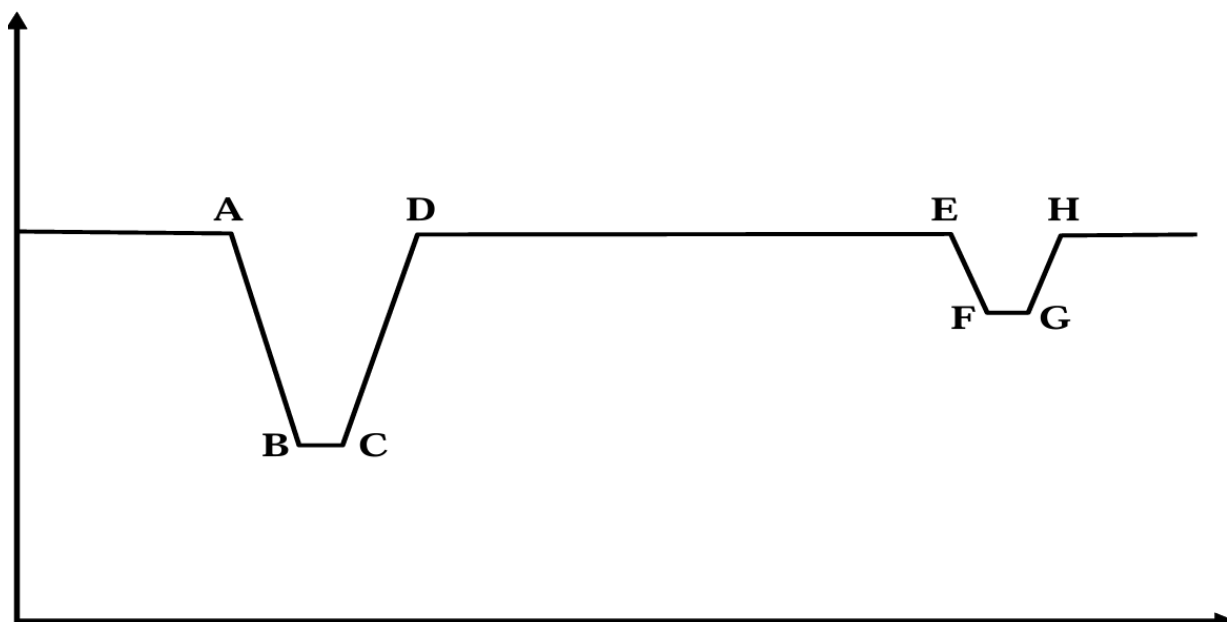
Изображения для лунной аналеммы получают с промежутком в синодический период Луны и осевого вращения Земли.

$$\Delta T = \frac{T_{\odot} T_{\text{с}}}{T_{\odot} - T_{\text{с}}} = \frac{23^{\text{h}}56^{\text{m}}4^{\text{s}} \cdot 27,3217^{\text{d}}}{27,3217^{\text{d}} - 23^{\text{h}}56^{\text{m}}4^{\text{s}}} = 24^{\text{h}}50^{\text{m}}31^{\text{s}}.$$

Ось второй аналеммы может сместиться из-за смещения точки пересечения орбиты Луны с плоскостью эклиптики, которая движется назад вдоль эклиптики примерно на 19,3 градуса в год, что соответствует около 1,6 градуса в месяц.

Критерии оценивания	Баллы
Выполнены построения осей аналемм	1+1
Определен угол наклона оси одной из аналемм к горизонту и получены значения широты в пределах $(40^\circ \pm 1^\circ)$	2+1
Рассчитан интервал съемки	1
Указана причина смещения оси аналеммы	2
Итого за задачу	8

Задание 11.5. Двойственность. Период затмения двойной звездной системы составляет 30 дней. Кривая блеска на рисунке ниже показывает, что вторичная звезда затмевает первичную звезду (от точки А до точки D) за восемь часов (измеряемых с момента первого контакта до окончательного контакта), тогда как от точки В до точки С полный период затмения составляет один час и восемнадцать минут. Спектральный анализ показывает, что лучевая скорость первичной звезды составляет 30 км/с, а вторичной - 40 км/с. Предполагая, что орбиты являются круговыми и имеют наклон $i = 90^\circ$, определить радиусы и массы обеих звезд в единицах солнечного радиуса и солнечной массы.



Возможное решение.

Переведем период затмения системы и указанные времена затмений из дней и часов в годы:

$$T = 30 \text{ дней} \approx 0,0821 \text{ года}, t_e = 8 \text{ ч} \approx 0,0009 \text{ года}, t_t = 1 \text{ ч } 18 \text{ мин} \approx 0,0001 \text{ года}.$$

Переведем скорости в а.е./год:

$$v_{r1}=30 \text{ км/с} \approx 6,3285 \text{ а.е. / год}; v_{r2}=40 \text{ км/с} \approx 8,4380 \text{ а.е. / год}.$$

Для круговых орбит известно соотношение

$$v_r = \frac{2\pi r}{T},$$

отсюда радиус орбиты можно определить как

$$r = \frac{v_r T}{2\pi}.$$

Вычислим:

$$r_1 = \frac{v_{r1} T}{2\pi} = \frac{6,3285 \cdot 0,0821}{2\pi} \approx 0,0827 \text{ а.е.} = 1,24 \cdot 10^7 \text{ км},$$

$$r_2 = \frac{v_{r2} T}{2\pi} = \frac{8,4380 \cdot 0,0821}{2\pi} \approx 0,1103 \text{ а.е.} = 1,65 \cdot 10^7 \text{ км}.$$

$$R = r_1 + r_2 = 0,0827 + 0,1103 = 0,1930 \text{ а.е.} = 2,89 \cdot 10^7 \text{ км}.$$

Радиус первичной звезды R_1 может быть определен из соотношения между временем затмений и периодом, с одной стороны, и удвоенным диаметром звезды и длиной орбиты, с другой:

$$\frac{t_e + t_t}{T} = \frac{4R_1}{2\pi R},$$

откуда

$$R_1 = \pi R \cdot \frac{t_e + t_t}{2T} = \pi \cdot 0,1930 \cdot \frac{0,0009 + 0,0001}{2 \cdot 0,0821} \approx 0,0039 \text{ а.е.} = 5,86 \cdot 10^5 \text{ км} = 0,84 R_{\odot}.$$

Аналогично для вторичной звезды:

$$\frac{t_e - t_t}{T} = \frac{4R_2}{2\pi R},$$

откуда

$$R_2 = \pi R \cdot \frac{t_e - t_t}{2T} = \pi \cdot 0,1930 \cdot \frac{0,0009 - 0,0001}{2 \cdot 0,0821} \approx 0,0028 \text{ а. е.} = 4,22 \cdot 10^5 \text{ км} = 0,61 R_{\odot}.$$

Здесь использовано справочное значение солнечного радиуса $R_{\odot} = 695000 \text{ км}$.

Определим массы звезд из третьего обобщенного закона Кеплера:

$$\frac{R^3}{T^2} = (M_1 + M_2) \text{ (здесь массы выражены в единицах } M_{\odot}).$$

При этом

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Участник может представить другую форму записи закона.

Отсюда можно получить, что:

$$M_1 = \frac{R^3 \cdot M_{\odot}}{T^2 \cdot (1 + r_1/r_2)} = \frac{0,1930^3 \cdot M_{\odot}}{0,0821^2 \cdot (1 + 0,0827/0,1103)} \approx 0,61 M_{\odot},$$

$$M_2 = \frac{R^3 \cdot M_{\odot}}{T^2 \cdot (1 + r_2/r_1)} = \frac{0,1930^3 \cdot M_{\odot}}{0,0821^2 \cdot (1 + 0,1103/0,0827)} \approx 0,46 M_{\odot}.$$

Ответ: радиусы звезд $0,84 R_{\odot}$ и $0,61 R_{\odot}$, массы звезд $0,61 M_{\odot}$ и $0,46 M_{\odot}$.

Критерии оценивания	Баллы
Определены радиусы орбит звезд	1+1
Установлена связь между параметрами орбит и звезд и временем	1
Определены радиусы звезд	1+1
Записан III закон Кеплера	1
Определены массы звезд	1+1
Итого за задачу	8