

**XXXII Санкт-Петербургская
Астрономическая олимпиада**
теоретический тур, решения

2025
2
февраля

9 класс

1. Сегодня ночью астроном Вася наблюдал в Санкт-Петербурге белую звезду. В этот же момент другой астроном Дима, находясь в Антарктиде, наблюдал другую звезду. Третий астроном Вова, находясь в Мурманске, этой же ночью наблюдал еще одну яркую звезду. Какие три звезды наблюдали астрономы, если известно, что все трое наблюдали звезды ярче 0^m .

Решение:

На земном небе есть всего пять звезд ярче 0^m : Солнце, Сириус, Канопус, α Центавра, Арктур.

В Мурманске и Санкт-Петербурге звезды Канопус и α Центавра являются невосходящими, а наблюдения Солнца ночью по очевидным причинам проблематичны, так что в этих двух городах наблюдали Сириус и Арктур. Сириус — звезда белого цвета, в то время как Арктур — оранжевого цвета. Поскольку Вася наблюдал именно белую звезду, то это должен был быть Сириус, а в Мурманске Вова наблюдал Арктур.

Сейчас на большей части территории Антарктиды полярный день, поэтому наблюдение других звезд, кроме Солнца, проблематично. При удачном выборе места и времени Дима мог наблюдать также Канопус или α Центавра, поднимающиеся высоко над горизонтом, но это сравнительно маловероятно.

С.А.Русаков

2. В далеком будущем на далекую круглую планету высадились три космических витязя. До них на планете уже кто-то побывал: рядом с местом высадки обнаружился камень, на котором было написано «Налево пойдешь — коня потеряешь, направо пойдешь — тоже коня потеряешь, прямо пойдешь — опять-таки коня потеряешь». Поскольку коней у них не было, они решили попробовать все три варианта: один шел все время на восток, другой — все время на запад, а третий на север, а когда дошел до полюса планеты, продолжил двигаться дальше в том же направлении, в котором шел до этого. Шли все витязи с одинаковой скоростью и одновременно встретились. Определите широту места, в котором они высадились на планету.

Решение:

Попробуем начать с формализации задачи. Два первых витязя проходят половину параллели. Если радиус планеты обозначить за R , а широту за φ , радиус параллели как окружности будет равен $R \cos \varphi$, а длина параллели будет равна $2\pi R \cos \varphi$. В таком случае каждый из двух витязей пройдет расстояние $l_{1,2} = \pi R \cos \varphi$.

Третий витязь сначала сдвигается на $90^\circ - \varphi$ при движении к полюсу планеты, затем еще на столько же, когда идет от полюса к параллели. Следовательно, его угловое смещение относительно центра планеты составляет $180^\circ - 2\varphi$, а длина пути составит, для углов в градусной мере

$$l_3 = \frac{180^\circ - 2\varphi}{360^\circ} \cdot 2\pi R \Rightarrow \pi R \cos \varphi = \frac{180^\circ - 2\varphi}{360^\circ} \cdot 2\pi R, \quad \cos \varphi = \frac{180^\circ - 2\varphi}{360^\circ} \cdot 2.$$

Немного удобнее уравнение выглядит при переводе углов в радианную меру:

$$\cos \varphi = \frac{\pi - 2\varphi}{2\pi} \cdot 2 \Rightarrow \cos \varphi + \frac{2\varphi}{\pi} = 1.$$

Уравнение трансцендентно, прямому решению не поддается. Можно задуматься о проверке частных случаев. Если витязи высадились на экваторе, то каждый из них пройдет ровно половину длины окружности планеты, так что $\varphi = 0$ является корнем. Широта северного полюса $\varphi = \pi/2$ также формально подходит — витязи просто стоят на месте — правда, они при этом явно не идут на запад, восток или север. Существуют ли какие-либо другие решения?

В принципе, можно заняться формальным исследованием функции в левой части уравнения и добраться до искомого ответа, но проще получить его другим, куда более коротким путем. По условию два первых витязя движутся по дугам малых кругов, третий — по дуге большого круга. Кратчайшее расстояние между точками на сфере — именно дуга большого круга, а это означает, что явиться в одну и ту же точку в одно и то же время витязи могут только в том случае, если все они движутся по дугам больших кругов (иначе говоря, два первых витязя идут по экватору). Следовательно, остается только один возможный вариант: витязи высадились на экваторе, широта места посадки равна 0° .

А.В.Веселова

3. Приливная электростанция — это гидроэлектростанция, работающая благодаря приливам на море или в океане, которые обеспечиваются движением Луны и Солнца. Мощнейшая проектируемая электростанция такого типа — Пенжинская (залив Шелихова, Охотское море). Высота приливов в заливе изменяется от 9 до 13 метров, а площадь затопляемого приливом бассейна равна 20 тысячам квадратных километров. Оцените, сколько энергии может выработать такая электростанция за год, если считать КПД турбин равным 100%.

Решение:

Если пренебречь рельефом дна океанов и береговой линией, то и Луна, и Солнце дают два приливных горба на поверхности Земли на противоположных меридианах. Тем самым за одни сутки будет наблюдаться по два прилива (и два отлива) от каждого небесного тела. Однако, солнечные приливы по своей величине примерно в два раза меньше лунных, и, с учетом рельефа дна и береговой линии, скорее несколько варьируют высоту лунных приливов. Иногда высота обоих приливов складывается (в моменты новолуния или полнолуния — наблюдается сизигийный прилив), иногда — вычитаются (около первой и третьей четвертей). С учетом обозначенных выше сложностей и тонкостей можно считать, что за одни сутки будет два прилива со средней высотой в $H = 11$ метров.

Для оценки максимального количества энергии будем считать, что турбины способны работать как в прямом, так и в реверсивном режиме. Прилив позволяет набрать чашу залива водой, что дает запас потенциальной энергии. Пока чаша залива наполняется, вода вращает турбины, вырабатывая электричество (гравитационная энергия Луны преобразуется в электрическую). Далее прилив заканчивается и начинается отлив. Вода, вытекая из залива через турбины электростанции, снова будет их вращать (в обратную сторону), опять-таки вырабатывая электричество (теперь гравитационная энергия Земли превращается в электрическую).

Для простоты будем считать, что залив Шелихова имеет вертикальные стенки высотой $H = 11$ метров. Тогда центр масс набранной чаши воды будет иметь высоту $h = H/2$. Пусть за один прилив запасется энергия величиной E_0 :

$$E_0 = mgh = \rho SHg \frac{H}{2} = \frac{g\rho SH^2}{2},$$

где $m = \rho SH$ — масса воды, наполняющей залив (ρ — плотность воды, S — площадь залива), g — ускорение свободного падения. За одни сутки масса воды m будет запасена дважды,

значит, через турбины она пройдет 4 раза, а за год — $N = 365 \cdot 4 = 1460$ раз. Получим оценку годовой выработки электроэнергии $E_{\text{год}}$ (все величины подставляем в СИ):

$$E_{\text{год}} = \frac{g\rho SH^2}{2} \cdot N = \frac{9.8 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{4+6} \cdot 121}{2} \cdot 1460 \approx 2 \cdot 10^{4+3+4+6+2} = 2 \cdot 10^{19} \text{ Дж.}$$

В.В.Григорьев

4. Годичный параллакс звезды в 50 раз превышает ее видимый угловой диаметр. Определите среднюю плотность звезды в г/см^3 , если ее масса равна 2 массам Солнца.

Решение:

Годичный параллакс равен отношению 1 а.е. к расстоянию до объекта. Видимый угловой диаметр равен отношению линейного диаметра к расстоянию до объекта. Отношение параллакса к видимому диаметру составляет 50, следовательно, тогда реальный диаметр звезды составляет $1/50$ а.е., а радиус — 10^{-2} а.е.

Среднюю плотность звезды можем определить напрямую, помня величину массы Солнца ($\mathfrak{M}_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$), для этого массу звезды делим на ее объем:

$$\langle \rho \rangle = \frac{\mathfrak{M}}{V} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}}{\frac{4}{3}\pi(1.5 \cdot 10^9 \text{ м})^3} \approx 3 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3.$$

Иначе можно сопоставить среднюю плотность звезды со средней плотностью Солнца, равной $1.4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, при этом также придется вспомнить радиус Солнца (либо вывести из соотношения видимого и линейного значений):

$$\frac{\langle \rho \rangle}{\langle \rho_{\odot} \rangle} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_{\odot}} \cdot \frac{V_{\odot}}{V} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_{\odot}} \cdot \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right)^3 = \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{7 \cdot 10^5 \text{ км}}{1.5 \cdot 10^6 \text{ км}} \right)^3 = 0.2,$$

откуда $\langle \rho \rangle = 0.2 \cdot 1.4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 3 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3$. Переводя это в требуемые в условии единицы, получаем 0.3 г/см^3 .

А.В.Веселова

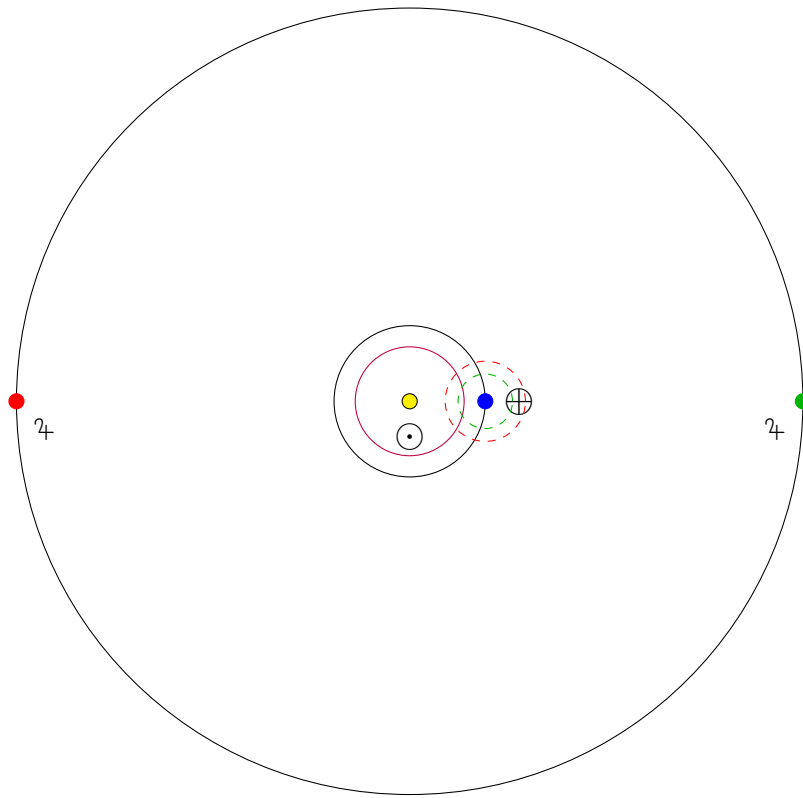
5. В некоторый момент угловые размеры Юпитера и Венеры для наблюдателя из Петербурга в точности совпали. На каком угловом расстоянии друг от друга на небе они при этом могут находиться? Орбиты планет считать круговыми.

Решение:

Воспользуемся оценкой, что Юпитер примерно в 11 раз больше Земли, а Венера — немного меньше. Тогда отношение их размеров можно принять равным 12. Поскольку их угловые размеры совпали, это означает, что расстояния до этих планет также отличаются в 12 раз.

Вспомним также, что радиусы орбит Венеры и Юпитера равны 0.7 и 5 а.е. соответственно. Тогда расстояние от Венеры до Земли варьируется в диапазоне $[0.3; 1.7]$ а.е., а в случае Юпитера — $[4; 6]$ а.е.

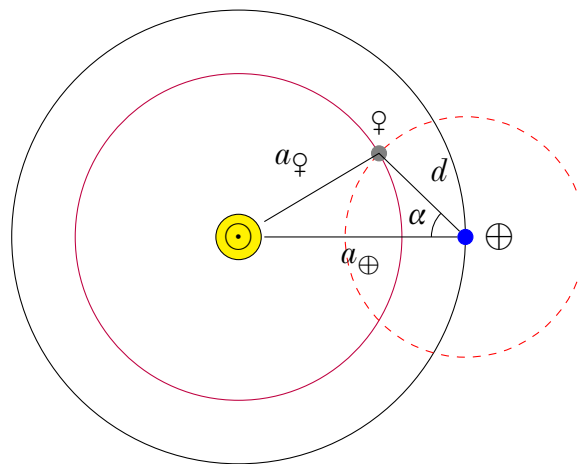
Если Юпитер находится максимально далеко от Земли (**в соединении**), то Венера должна находиться на расстоянии $6/12 = 0.5$ а.е., и это допустимо. Если же Юпитер максимально близко к Земле (**в противостоянии**), то расстояние до Венеры будет составлять 0.33 а.е., что также допустимо, значит, подобная ситуация в принципе возможна. Нарисуем расположение планет в масштабе:



Здесь синим кружком обозначена Земля, желтым — Солнце, фиолетовой окружностью — орбита Венеры. В точках пересечения зеленой пунктирной и фиолетовой сплошной окружностей может располагаться Венера для удовлетворения указанного условия в случае наблюдения Юпитера в противостоянии (зеленый кружок на внешней орбите). Аналогично для соединения Юпитера получаем красный кружок и красную пунктирную окружность. В случае перемещения Юпитера от противостояния до соединения Венере «разрешается» переместиться по своей орбите от зеленой окружности до красной. Оба промежутка симметричны, и нужно будет аккуратно с ними разобраться.

Найдем величины углов. Это можно сделать двумя способами: аналитически, то есть при помощи теоремы косинусов (использовав известное расстояние до Венеры и найдя ее элонгацию), или измерив транспортиром угол между планетами для наблюдателя с Земли, если рисунок выше нарисован достаточно аккуратно.

Приведем аналитическое решение для соединения Юпитера. Пусть элонгация Венеры равна α на расстоянии $d = 0.5$. Тогда:



$$a_{\oplus}^2 = a_{\oplus}^2 + d^2 - 2a_{\oplus}d \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a_{\oplus}^2 + d^2 - a_{\oplus}^2}{2a_{\oplus}d} = \frac{1^2 + 0.5^2 - 0.7^2}{2 \cdot 1 \cdot 0.5} \approx 0.75.$$

Отсюда $\alpha \approx 40^\circ$ (что можно найти, например, интерполяцией известных значений косинусов для углов 30° и 45°). Аналогично элонгация Венеры во время противостояния Юпитера получается $\alpha' \approx 27^\circ$.

Итак, пусть Юпитер в соединении, а Венера находится в западной элонгации (в верхней половине рисунка — пересечение красной пунктирной и фиолетовой окружностей). Тогда угол между Венерой и Юпитером должен составлять $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Если мысленно перемещать Юпитер по его орбите против часовой стрелки, то Венеру придется двигать в том же направлении, но существенно медленнее, и угол между ними будет уменьшаться. В некоторый момент Юпитер и Венера окажутся на одной линии, значит, угол между ними окажется равен 0° , но Венера еще не достигнет красной пунктирной окружности (в этот момент до Венеры расстояние окажется равным 0.5 а.е.). Далее двигая Юпитер против часовой стрелки мы позволим планетам разойтись. Когда Юпитер окажется в противостоянии, Венера дойдет до красной пунктирной окружности, и угол между планетами составит 27° .

Если двигать Юпитер далее, то Венеру придется двигать обратно по своей орбите, и в некоторый момент окажется так, что Юпитер и Венера снова окажутся на одной линии, но по разные стороны от Земли, то есть их будет разделять 180° (Венера еще не «дойдет» до зеленой пунктирной окружности, расстояние до Венеры составит 0.38 а.е.). Далее Юпитер снова окажется в противостоянии, а Венера — на ближайшем возможном по условию расстоянии к Земле.

В результате получаем итоговый ответ: при совпадении угловых размеров Юпитера и Венеры угловое расстояние между ними на небе может оказаться любым, в диапазоне от 0° до 180° .

В.В.Григорьев