

ОТВЕТЫ НА ТЕСТ

Тест 1. Только один возможный ответ: «Верно» или «Неверно» (5 баллов)

1	2	3	4	5
верно		верно		
	неверно		неверно	неверно

Тест 2. Только один правильный ответ (20 баллов)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				1		1			
2								2	
	3	3			3				
			4				4		4

Тест 3. Выбрать все верные ответы (15 баллов)

1	1,3,5,6
2	2,3,4
3	2,3,4
4	3,5
5	4,5

ЗАДАЧИ

Задача 1 (20 баллов).

Американский гражданин Гомер Симпсон имеет функцию полезности $U = X^a Y^b$, где X – число выпитых в течение месяца порций йогурта, Y – число съеденных в течение месяца упаковок попкорна.

На указанные продукты Симпсон тратит весь свой месячный бюджет. Однажды в течение месяца Гомер выпил 784 порций йогурта и съел 4 упаковки попкорна, но, как ему показалось, не получил за потраченные деньги максимально возможного удовлетворения. В другой месяц Симпсон выпил всего лишь 16 порций йогурта, но при этом съел 196 упаковок попкорна. Однако и в этом случае он получил ту же степень удовлетворения, что и в предыдущем месяце.

Какое количество порций йогурта и упаковок попкорна максимизирует функцию полезности Симпсона в расчете на его месячный бюджет?

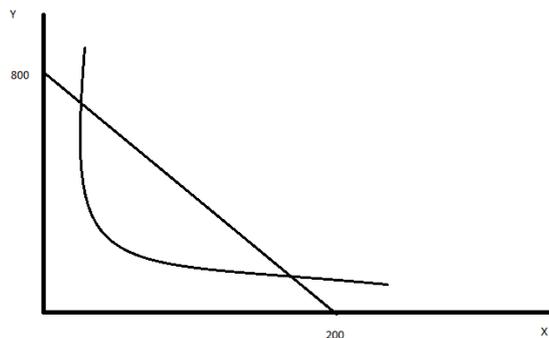
Решение:

Так как в обоих случаях Гомер тратит весь свой месячный бюджет, то справедливо, что оба набора лежат на бюджетном ограничении, то есть на графике функции представленной в общем виде как

$$Y = a - b * X$$

$$\begin{cases} 784 = a - 4 * b \\ 16 = a - 196 * b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 784 + 4b \\ a = 196b + 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 800 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$Y = 800 - 4 * X$$



(5 баллов за нахождение бюджетного ограничения + 3 балла за максимальные значения X и Y)

Два набора, потребляемых Симпсоном приносят ему одинаковую полезность

$$784^\alpha * 4^\beta = 16^\alpha * 196^\beta$$

Сократив обе части на 16 и 4 соответственно получим:

$$49^\alpha * 1^\beta = 1^\alpha * 49^\beta$$

Так как единица в любой степени дает 1, справедливо, что

$$49^\alpha = 49^\beta \rightarrow \alpha = \beta$$

(5 баллов за идею равенства $\alpha = \beta$)

Условием оптимума для Гомера является равенство взвешенных предельных полезностей

$$\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Y}{P_Y} \rightarrow \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{P_X}{P_Y}$$

на фоне выполнения бюджетного ограничения, то есть

$$\begin{cases} \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \\ XP_X + YP_Y = I \end{cases}$$

$$MU_X = U'_X = \alpha X^{\alpha-1} Y^\beta$$

$$MU_Y = U'_Y = \beta X^\alpha Y^{\beta-1}$$

$$\frac{\alpha X^{\alpha-1} Y^\beta}{\beta X^\alpha Y^{\beta-1}} = \frac{P_X}{P_Y} \rightarrow \frac{\alpha Y}{\beta X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha Y}{\beta X} = \frac{P_X}{P_Y} \\ XP_X + YP_Y = I \end{cases}$$

(2 балла за оптимум в общем виде)

Так как ранее было доказано, что $\alpha = \beta \rightarrow XP_X = YP_Y$

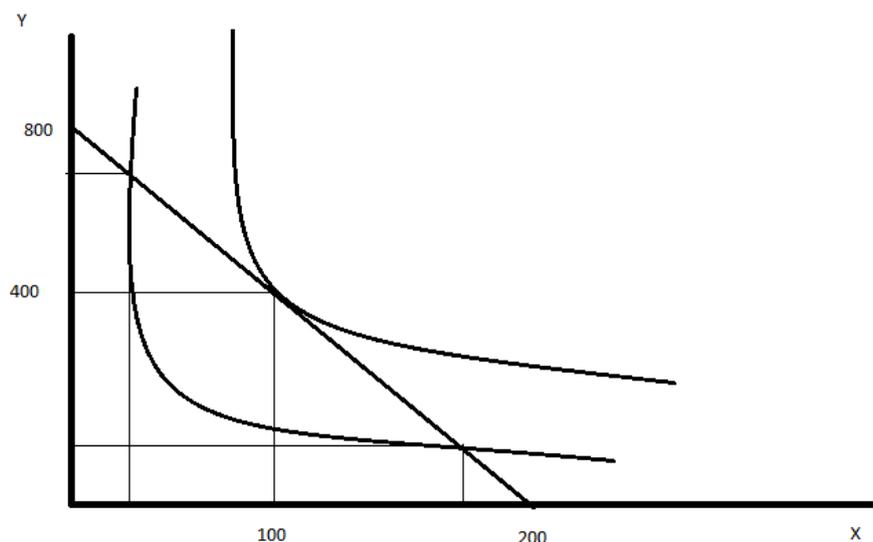
$$\text{Тогда } 2X^*P_X = I \rightarrow X^* = \frac{I}{2P_X}$$

То есть оптимум X равен половине от максимального значения X или $200/2=100$

$$\text{Тогда } 2Y^*P_Y = I \rightarrow Y^* = \frac{I}{2P_Y}$$

То есть оптимум Y равен половине от максимального значения Y или $800/2=400$

(5 баллов за решение системы)



Ответ: в оптимальном наборе потребляется 400 йогуртов и 100 пачек попкорна

Задача 2 (20 баллов).

На территории автовокзала предприниматель Геворг перепродает сумки, которые он покупает на рынке "Восточный" по фиксированной цене. Аренда места продаж обходится ему в 200 рублей за день. Геворг располагает информацией о спросе на сумки: если он назначает цену за одну сумку 1200 рублей и выше, то не продает ничего, при цене менее 1200 рублей спрос на сумки существует. Эластичность спроса по цене в точке максимума прибыли, составляет -2, спрос на сумки описывается линейной функцией. Геворг знает, что получит максимальную выручку, если продаст 6 сумок в день. Конкурентов у него нет.

1. Сколько сумок в день и по какой цене нужно продать Геворгу, если он стремится к максимизации прибыли? (8 баллов)

2. Рассчитайте, какую прибыль получает Геворг в день. (12 баллов)

Решение:

Пункт 1 – 2 действия (порядок может меняться)

а) (4 балла) Вывод функции спроса на продукцию. По условию, если $Q=0$, то $P=1200$. Выручка по условию максимальна при $Q=6$. В этой точке $E_p^D = -1$, данное значение эластичности соответствует точке в середине линейной функции спроса, следовательно, при $Q=12$, цена равна нулю. Выводим линейную функцию спроса, проходящую через две точки. Функция спроса имеет вид $P=1200-100*Q$ или $Q=12-0,01*P$.

б) (4 балла) Найдем цену и количество, используя, значение эластичности в точке максимума прибыли.

$$\text{1-й способ: } E_p^D = Q'_P \frac{P}{Q}$$

$$-2 = -0,01 \frac{P}{12 - 0,01P}, \text{ отсюда } P=800.$$

Подставляем цену в функцию спроса и находим: $Q = 12 - 0,01 \cdot 800 = 4$.

2-й способ: Нахождение цены и количества исходя из геометрического смысла эластичности.

$$\frac{12 - Q}{Q} = 2 \text{ следовательно, } Q=4$$

$$\frac{P}{1200 - P} = 2 \text{ следовательно, } P=800$$

Пункт 2

а) Пусть цена сумки X рублей (или любое неизвестное число), тогда переменные затраты в день $VC = X \cdot Q$, постоянные затраты (по условию задачи) равны 200 ($FC = 200$).
 $TC = VC + FC = X \cdot Q + 200$. Тогда предельные затраты (**4 балла**) $MC = TC'(Q) = X$, или любой константе.

б) Чтобы найти функцию общих издержек, нужно найти функцию MC .

1-й способ:

Найдем функцию предельной выручки, которая имеет угол наклона в 2 раза больше, чем обратная функция спроса из пункта 1а), то есть $MR = 1200 - 200 \cdot Q$.

В точке максимума прибыли, при $Q=4$ и $P=800$, выполняется равенство MR и MC .
 $MC = MR = 1200 - 200 \cdot 4 = 400 = X$

2-й способ:

Запишем индекс Лернера $\frac{P - MC}{P} = \frac{1}{|E_p^D|}$. Получаем $\frac{800 - MC}{800} = \frac{1}{2}$, $MC = 400$.

Тогда функция общих издержек имеет вид $TC = 400 \cdot Q + 200$

(4 балла за любой из способов)

в) Найдем прибыль в точке максимума прибыли:
 $\pi = TR - TC = P \cdot Q - TC = 4 \cdot 800 - (400 \cdot 4 + 200) = 1200$ (**4 балла**)

Ответ:

1. $P=800$, $Q=4$.

2. Прибыль=1200 рублей в день.

Задача 3 (15 баллов).

У юного программиста Пети есть две банковских карты: дебетовая и кредитная. Как представитель прогрессивной молодежи, пользующийся всеми прелестями современных технологий, молодой человек совершает покупки, используя исключительно безналичные расчеты.

В начале месяца, Петя решил купить авиабилеты на сумму 12 тыс. руб.

Если оплатить покупку кредитной картой (кредитный лимит позволяет), то ему придется вернуть деньги банку через N дней, чтобы не выйти из льготного периода, в течение которого можно бесплатно погашать кредит. Также в этом случае через 1 месяц банк выплатит кешбэк в размере 1% от стоимости покупки.

Если же он оплатит покупку дебетовой картой (денег на карте вполне достаточно), то через 1 месяц получит кешбэк в размере 2% от стоимости покупки. Известно, что годовая ставка процента на среднемесячный остаток денежных средств на дебетовой карте составляет 6% годовых (считайте для простоты, что в каждом месяце 30 дней, выплата процентов на карту происходит в конце каждого месяца, а начисленные на остаток денежных средств проценты не капитализируются).

Определите, при каком наибольшем количестве дней N , при прочих равных условиях, выгоднее заплатить за данную покупку авиабилетов дебетовой картой.

Решение:

При оплате кредитной картой сумма в 12 тыс. руб. будет находиться на дебетовой карте Пети N дней, что принесет ему

$$\frac{6N}{100 \cdot 12 \cdot 30}$$

в виде процентов на остаток денежных средств (**3 балла за рассуждение**).

Также он получит $12000 \times 0,01 = 120$ руб. за счет кешбэка. (**+1 балл**)

При оплате дебетовой картой юноша получит через 1 месяц кешбэк в размере $12000 \times 0,02 = 240$ руб. (**+1 балла**)

Чтобы было выгоднее заплатить за эту покупку дебетовой картой, должно быть выполнено неравенство

$$\frac{6N}{100 * 12 * 30} + 120 < 240$$

Оно справедливо, если $N \leq 60$. Таким образом, наибольшее число дней льготного периода, при котором данную покупку выгоднее оплатить дебетовой картой, составляет 59 дней. **(10 баллов за рассуждение и корректное решение)**

Ответ: 59 дней

Задача 4 (15 баллов).

На рынке совершенной конкуренции спрос и предложение линейны и равновесное $Q=20$. Государство вводит потоварный налог по ставке $t=10$ и на производителя и на потребителя (то есть в итоге государство собирает два налога). Найдите эластичность кривой Лаффера (по ставке налога) в точке, где $t=5$ (также собирается два налога), если известно что новое равновесие (при $t=10$) в точке $Q=10$.

Решение:

$$Q = f(t) = a - b * t$$

$$Tx = t * Q$$

Пользуясь условием о линейности функций спроса и предложения, запишем их в общем виде

$$Q_D = a - b * P$$

$$Q_S = c + d * P$$

Тогда справедливо, что в точке равновесия

$$a - b * P = c + d * P = 20$$

(1 балл за рассуждение)

При введении потоварного налога на потребителей и производителей новое условие равновесия будет выглядеть как

$$a - b * (P + 10) = c + d * (P - 10) = 10$$

(2 балла за рассуждение)

Из каждой части приведенных равенств можно составить 2 системы уравнения с тремя переменными и найти значения констант для записи функций спроса и предложения в общем виде

$$\begin{cases} a - b * P = 20 \\ a - 10b - b * P = 10 \\ c + d * P = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 20 + P \\ d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c + d * P - 10d = 10 \\ Q_D = a + P \\ Q_S = c - P \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 20 - P \end{cases}$$

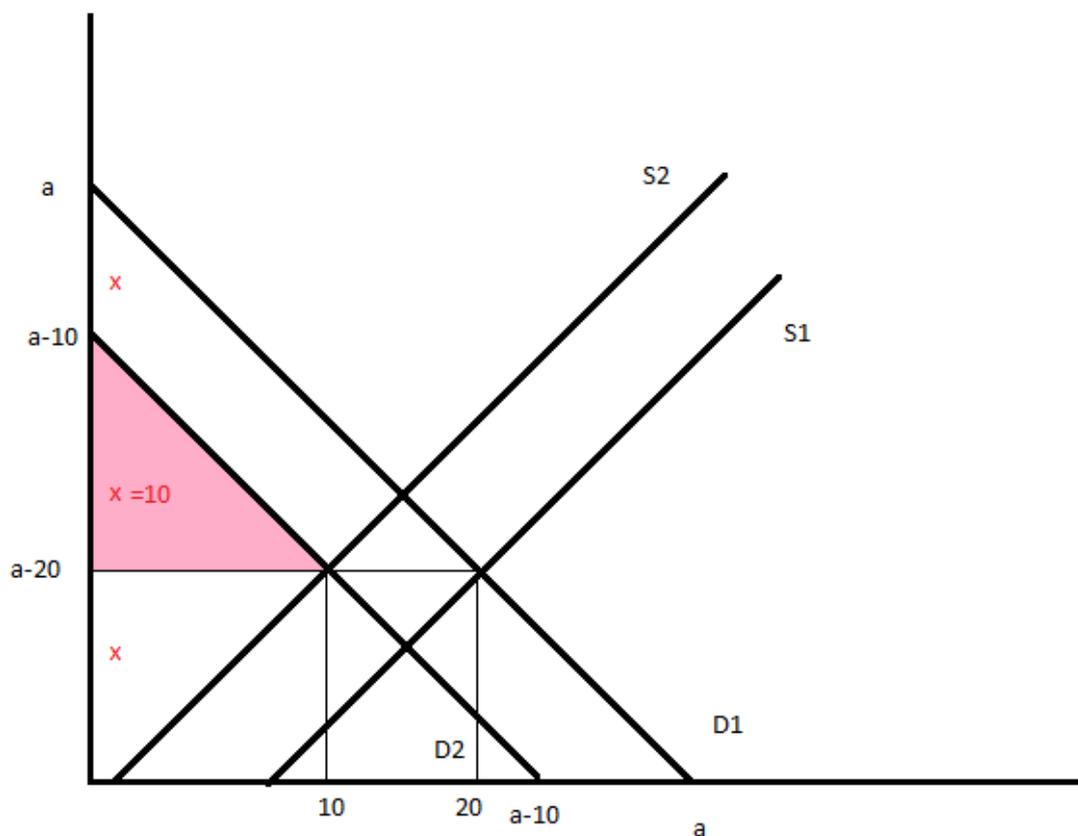
$$a + P = c - P = 20$$

$$a + c = 20 + P + 20 - P \rightarrow a + c = 40 \rightarrow a = 40 - c$$

$$Q_D = 40 - c - P$$

$$Q_S = c + P$$

(3 балла за рассуждение)



$$a = 30; c = 10$$

$$Q_D = 30 - P$$

$$Q_S = 10 + P$$

$$P = 10$$

$$Q = 20$$

$$Q_D = 30 - P - t = 10$$

$$Q_S = 10 + P - t = 10$$

(4 балла за выведение функций спроса и предложения)

Тогда при введении налога и на потребителя и на производителя справедливо следующее

$$2Q = 30 - P - t + 10 + P - t$$

$$Q = 20 - t$$

(3 балла за выведение функций спроса от налога)

$$Tx = t * Q = 20t - t^2$$

$$E_t^{Tx} = Tx' * \frac{t}{Tx} = (20 - 2t) * \frac{t}{20t - t^2} = (20 - 2t) * \frac{1}{20 - t}$$

$$E_t^{Tx}(5) = Tx' * \frac{t}{Tx} (20 - 10) * \frac{1}{20 - 5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0,67$$

(2 балла за ответ)